ФГБОУ ВПО

«Брянская государственная сельскохозяйственная академия"

Комогорцев В.Ф.

Бардадын Н.Н.

Дискретная математика

Множества
Математическая логика
Графы

Учебное пособие

для студентов сельскохозяйственного вуза

(бакалавриат)

Брянск-2012

УДК 51

ББК 22.1

К 63

Комогорцев В.Ф. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: множества, математическая логика, графы: Учебное пособие / В.Ф. Комогорцев, Н.Н. Бардадын. – Брянс.К.: Издательство Брянской ГСХА, 2012. - 88 с.

В пособии в доступной форме изложены основные понятия и факты классических разделов дискретной математики: теории множеств, математической логики, графов. Каждый параграф содержит примеры и упражнения с ответами для самостоятельной работы. Пособие предназначено для изучения дискретной математики студентами сельскохозяйственного вуза (бакалавриат).

РЕЦЕНЗЕТЫ: декан физико – математического факультета Брянского госуниверситета, профессор Горбачев В.В.;

старший преподаватель кафедры информатики Брянской ГСХА, к.т.н Панкова Е.А.

РЕКОМЕНДОВАНА К ИЗДАНИЮ МЕТОДИЧЕСКОЙ КОМИССИЕЙ ФАКУЛЬТЕТА ЭНЕРГЕТИКИ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ ОТ 14.06.12 Г., ПРОТОКОЛ №16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Математику, которая базируется на использовании непрерывно меняющихся переменных величин и на использовании функций от таких величин, называют ***непрерывной математикой***. Линии и их уравнения, производные, интегралы, дифференциальные уравнения и т.д. – всё это относится к непрерывной математике. Непрерывно меняющиеся переменные величины, изображенные как точки системы координат, оставляют в ней после себя сплошной след, то есть некую непрерывную линию. А если переменная меняется скачками (прерывисто), то говорят, что она меняется ***дискретно***. Тогда и она сама, и различные функции от нее изучаются с помощью другой математики – ***дискретной***.

Например, дискретно (прерывисто) будут располагаться следы пешехода на дороге, хотя сам путь, проходимый этим пешеходом, будет меняться непрерывно. И если нас будут интересовать именно следы и различные группы таких следов, то для их описания непрерывная математика не годится – нужно применять дискретную.

Ещё пример. Вычислительные машины, как известно, состоят из множества токопроводящих элементов, к которым в процессе работы машины то подается напряжение и, следовательно, по ним идет ток, то напряжение не подается и ток, соответственно, не идет. Таким образом, элементы вычислительной машины работают скачкообразно (дискретно) и, значит, описание их работы требует применения дискретной математики.

Кстати, прохождению тока через элемент ставится в соответствие цифра 1, а отсутствию тока через него – цифра 0. Элементы работающей машины выдают, таким образом, некие последовательности нулей и единиц (двоичные числа), с помощью которых можно кодировать различные числа, буквы, символы компьютерной графики, а также записывать в понятной машине цифровой форме управляющие программы её работы.

И вообще, дискретную математику часто называют ***компьютерной математикой***, ибо современная информационная техника (компьютеры, сотовые телефоны, спутниковое телевидение и т. д.) базируется на дискретных (цифровых) принципах. Современные фотоаппараты – цифровые. В ближайшие годы на цифровое вещание перейдут (и уже переходят) эфирные радио и телевидение. Поэтому значение дискретной математики в последнее время сильно возросло, и её роль в образовании специалистов самых разных профилей и направлений будет повышаться и в дальнейшем.

В нашем кратком (семестровом) курсе дискретной математики мы познакомимся с основами следующих её разделов:

1. Теория множеств.
2. Математическая логика.
3. Графы.

В дискретную математику входят и многие другие разделы. Например, теория игр, теория алгоритмов, теория конечных автоматов, методы криптографии (шифровки и дешифровки), и т.д. Но с этими разделами дискретной математики студентам предлагается ознакомиться (если возникнет такая необходимость или интерес) по литературе самостоятельно.

Достаточно обширный список такой литературы содержится, например, в книге: А.И. Мальцев. Дискретная математика. Учебное пособие. Санкт - Петербург, издательство «Лань», 2011, 304 стр. с илл. Часть этого списка приведена в конце книги. Ещё более обширный список дополнительной литературы можно скачать из интернета.

Глава 1

Множества

§1. Первоначальные понятия

Математика как наука базируется на ряде исходных, первоначальных понятий, настолько простых, что их нельзя определить через ещё более простые понятия. К таким фундаментальным понятиям относятся число, точка, прямая, плоскость. Множество тоже относится к исходным, первоначальным понятиям математики, не подлежащим определению. Множество, как и другие первоначальные понятия, задается лишь своими свойствами. Основы теории множеств заложил в 19 веке немецкий математик Георг Кантор.

Интуитивное понятие множества есть у каждого. Множество – это нечто единое, но имеющее свою структуру. То есть состоящее из неких обособленных друг от друга объектов. Предметы (объекты), составляющие множество, называются его ***элементами***. Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, X, … .Запись $A=\{a,b,c,...\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c, … . То, что a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ ($\in$ - знак принадлежности), и читается: “a принадлежит множеству A”, или “a входит в множество A”. Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A (не принадлежит множеству A).

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется ***конечным***, в противном случае – ***бесконечным***. Например, множество A всех студентов студенческой группы или даже множество всех граждан нашей страны является конечным. А множество N всех натуральных чисел или множество всех точек любого отрезка является бесконечным.

Множество, не содержащее элементов, называют ***пустым множеством*** и обозначают символом $\varnothing$.

Множества A и B считаются ***равными*** (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Это значит, что если элемент a принадлежит множеству A, то он принадлежит и множеству *B*. И наоборот. Если это не так, то множества *A* и *B* считаются ***неравными*** ($A \neq B$).

Если известно, что каждый элемент множества *A* принадлежит множеству *B* и при этом $A \neq B$, то множество *A* называется ***подмножеством*** множества *B*, и записывают этот факт так: $A \subset B$ (множество *A* содержится в множестве *B*). Например, множество *A* всех студентов данной студенческой группы является подмножеством множества *B* всех студентов их курса ($A \subset B$). Также очевидно, $N \subset Z$, где *N* – множество натуральных чисел, а *Z* – множество целых чисел.

Допуская равенство множеств *A* и *B*, знак принадлежности одного множества другому обозначают символом $\subseteq$ и пишут $A \subseteq B$. Символы $\subset$ и $\subseteq$ являются аналогами знаков неравенства $\prec$ и $\leq$ в арифметике и алгебре.

Множество считается заданным, если тем или иным способом указаны (описаны) все его элементы. Например:

$$A = \{-1, 0, 1\},$$

$$X = \{x \mid x - \textit{корни уравнения } x^3 - x = 0\} = \{-1,\ 0,\ 1\},$$

$$B = \{x \mid x - \textit{корни уравнения } x^3 + x = 0\} = \{-1,\ 0\}$$

Здесь $A = X$; $B \subset A$; $B \subset X$.

§2. Операции над множествами

<u>Определение1</u>.

Объединением (суммой) множеств *A* и *B* называется множество *C*, элементами которого являются все элементы множества *A*, все элементы множества *B*, и которое никаких других элементов не содержит.

При этом пишут: $C = A \cup B$. Например, если $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$, то $A \cup B = C = \{1, 2, 3, 4\}$.

<u>Определение 2</u>.

Пересечением (произведением) множеств *A* и *B* называется множество *C*, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству *A*, и множеству *B*.

При этом пишут: $C = A \cap B$. Например, если $A = \{1,2\}$ и $B = \{2,3,4\}$, то $A \cap B = C = \{2\}$.

Отметим очевидные факты: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ для любого множества A.

Так как множества $A \cup B$ и $A \cap B$ определяются единственным образом, то из этой единственности вытекают следующие свойства объединения и пересечения множеств:

1) $A \cup B = B \cup A$ - коммутативность объединения (суммы) множеств; (2.1)

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - ассоциативность объединения (суммы) множеств;

3) $A \cap B = B \cap A$ - коммутативность пересечения (произведения) множеств;

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ассоциативность пересечения (произведения) множеств.

Эти свойства суммы и произведения множеств являются аналогами суммы и произведения чисел:

1) $a + b = b + a$; 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) $a \cdot b = b \cdot a$; 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. ($a, b, c$ – любые числа)

Определение 3.

Разностью множеств A и B называют множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B. При это пишут : $C = A - B$ или $C = A \backslash B$.

Например, если $A = \{1,2\}$ и $B = \{2,3,4\}$, то $A - B = \{1\}$, а $B - A = \{3,4\}$. Этот пример показывает, что операция разности множеств не коммутативна ($A - B \neq B - A$), а тем более не ассоциативна.

Из определения этой операции, в частности, следует:

$$A - A = \varnothing, \qquad (A - B) \cap (B - A) = \varnothing \tag{2.2}$$

При работе с различными множествами некоторой конкретной природы вводится так называемое ***универсальное множество I***, такое, что все остальные множества A, B, C, …этой природы являются подмножествами этого универсального множества ***I***. Например, любые множества, элементами которых являются студенты данного вуза, являются подмножествами универсального множества ***I***, состоящего из всех студентов вуза. Ещё пример: любые числовые множества действительных чисел являются подмножествами универсального множества ***I***=*R* – множества всех действительных чисел.

Определение 4.

Множество элементов универсального множества ***I***, не принадлежащих множеству *A*, называется ***дополнением множества A до множества I*** и обозначается символом $\overline{A}$. То есть $\overline{A} = I - A$. При этом, очевидно, $A \cup \overline{A} = I$.

Определение 5.

Симметрической разностью множеств *A* и *B* называется множество

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \tag{2.3}$$

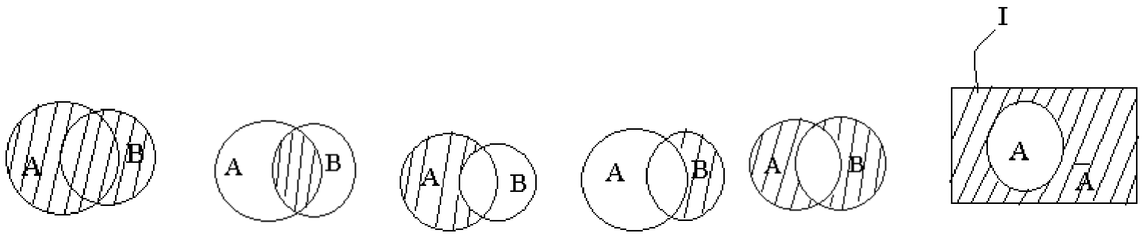
В частности, $A \Delta A = \varnothing$. Операция $A \Delta B$ очевидным образом коммутативна:

$$A \Delta B = B \Delta A \tag{2.4}$$

Она также ассоциативна:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \tag{2.5}$$

Для наглядности сути всех введенных выше операций со множествами используют так называемые ***диаграммы Эйлера – Венна***:



$A \cup B$ $A \cap B$ $A - B$ $B - A$ $A \Delta B$

Рис 1.1

В силу своей наглядности диаграммы Эйлера – Венна позволяют выяснять смысл и многих других, более сложных, операций со множествами.

Докажем, например, следующие равенства:

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \tag{2.6}$$

$$A - B = A \Delta (A \cap B) \tag{2.7}$$

Доказательство (2.6):

$$(A\Delta B)\Delta(A \cap B) = \underbrace{\big((A\Delta B) - (A \cap B)\big)}_{A\Delta B} \cup \underbrace{\big((A \cap B) - (A\Delta B)\big)}_{A\cap B} = (A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

Доказательство (2.7):

$$A\Delta(A \cap B) = \underbrace{\big(A - (A \cap B)\big)}_{A-B} \cup \underbrace{\big((A \cap B) - A\big)}_{\varnothing} = (A - B) \cup \varnothing = A - B$$

Доказанные равенства (2.6) и (2.7) свидетельствуют о том, что через две операции – пересечения множеств $A \cap B$ и симметрической разности множеств $A\Delta B$ - можно выразить две другие операции: объединения (суммы) множеств $A \cup B$ и разности множеств $A - B$. Это аналогично тому, что через две арифметические операции – сложение и умножение чисел можно определить две другие арифметические операции – вычитание чисел и их деление.

§3. Свойства операций над множествами

Систематизируем свойства операций над множествами. Для любых множеств выполняются следующие равенства:

Коммутативность (перестановочный закон):

1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$; 3) $A\Delta B = B\Delta A$ (3.1)

Ассоциативность (сочетательный закон):

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; 5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

6) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (3.2)

Дистрибутивность (распределительный закон одной операции относительно другой):

$$7)\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\ ; \quad 8)\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (3.3)$$

Идемпотентность (операции множества с самим собой):

$$9)\ A \cup A = A\ ; \quad 10)\ A \cap A = A\ ; \quad 11)\ A - A = \varnothing\ ; \quad 12)\ A \Delta A = \varnothing \qquad (3.4)$$

Законы де Моргана

$$13)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\ ; \quad 14)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (3.5)$$

Другие свойства

15) $A \cup \varnothing = A$; 16) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 17) $\overline{\varnothing} = I$; 18) $\overline{I} = \varnothing$;

19) $\overline{\overline{A}} = A$; 20) $A \cup I = I$; 21) $A \cap I = A$; 22) $\overline{A} \cup A = I$; (3.6)

23) $\overline{A} \cap A = \varnothing$; 24) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$;

25) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$; 26) $A - (A - B) = A \cap B$ и т.д.

Часть из этих свойств очевидна, так как они непосредственно следуют из определения соответствующих операций над множествами. Другая часть очевидным образом подтверждается диаграммами Эйлера – Венна. А для доказательства более сложных свойств можно применить следующие универсальные средства: 1) таблицы истинности; 2) метод эквивалентных переходов.

Таблица истинности

Эта таблица для основных операций над множествами *A* и *B* выглядит так:

Таблица 1.

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$	$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Первые два столбца этой таблицы являются исходными. В их строках приведены все возможные ситуации, которые могут иметь место для произвольного элемента, который может принадлежать обоим множествам A и B, только одному из них или не принадлежать никому. Если элемент принадлежит множеству, то в таблице ставится 1, если нет, то 0. Следовательно, каждой операции с множествами A и B соответствует некоторый ***столбец значений***. Две операции с множествами задают одинаковые (равные) множества, если совпадают их столбцы значений.

Докажем, например, этим способом свойство де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Для этого заполним таблицу истинности и сравним столбцы значений $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$:

Таблица 2.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

Так как столбцы $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ совпадают, то $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Метод эквивалентных переходов

При доказательстве совпадения (равенства) множеств этим методом выполняют поэтапные переходы в соответствии с определениями соответствующих операций и показывают, что если некий элемент принадлежит левой части доказываемого равенства, то он принадлежит и правой части. И наоборот.

Для примера докажем равенство де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ этим методом.

1)Пусть x – произвольный элемент множества $\overline{A \cup B}$. Тогда $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow \{x \notin A \text{ и } x \notin B\} \Rightarrow \{x \in \overline{A} \text{ и } x \in \overline{B}\} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

То есть мы доказали, что если элемент $x \in \overline{A \cup B}$, то $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. А теперь проведем доказательство в обратную сторону.

2) Пусть x – произвольный элемент множества $\overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \{x \in \overline{A} \ \ и \ \ x \in \overline{B}\} \Rightarrow \{x \notin A \ \ и \ \ x \notin B\} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}.$$

Таким образом, действительно $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Примечание. Таблица истинности (таблица 1) представлена для операций лишь с двумя множествами A и B. Если же в этих операциях участвуют три и более множеств, то и исходных столбцов в таблице истинности будет соответствующее число – три и более. А так как в этих исходных столбцах должны быть представлены все возможные ситуации по принадлежности или не принадлежности произвольного элемента всем множествам, то соответствующая таблица истинности станет более обширной.

Составим, например, таблицу истинности для доказательства равенства (25) – предпоследнего из равенств (3.6):

Таблица 3.

A	B	C	$A \cup B$	$C-(A \cup B)$	$C-A$	$C-B$	$(C-A) \cap (C-B)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**0**	0	1	**0**
1	1	0	1	**0**	0	0	**0**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

Как видим, столбцы операций $C-(A \cup B)$ и $(C-A) \cap (C-B)$ полностью совпадают. То есть действительно $C-(A \cup B) = (C-A) \cap (C-B)$.

§4. Мощность множеств

Различные множества могут содержать различные количества входящих в них элементов. Конечные множества содержат в себе конечное число элементов, бесконечные – бесконечное. Для более детальной характеристики количества элементов, входящих в множество, вводится понятие ***мощности множества***.

Определение 1.

Мощностью $|A|$ ***конечного*** множества A называется количество всех элементов этого множества. То есть если n – количество элементов множества A, и $|A|$ - мощность этого множества, то

$$|A| = n \ . \qquad (4.1)$$

Если A и B – произвольные два конечные множества, то

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (4.2).$$

Действительно, мощность объединения $A \cup B$ множеств A и B, то есть количество элементов этого множества $A \cup B$, будет равна суммарному количеству $|A| + |B|$ элементов множества A и B за вычетом количества тех элементов, которые являются общими (совпадающими) для этих множеств, то есть за вычетом $|A \cap B|$. Этот вычет связан с тем, что при суммарном подсчете всех элементов множеств A и B совпадающие элементы этих множеств подсчитываются дважды, ибо они входят и в A, и в B. Особенно ясным это становится, если проиллюстрировать равенство (4.2) диаграммой Эйлера – Венна (рис.1.2):

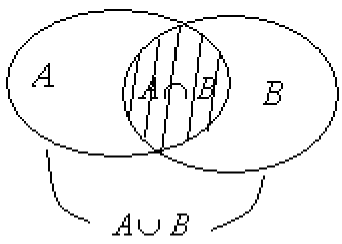


рис.1.2

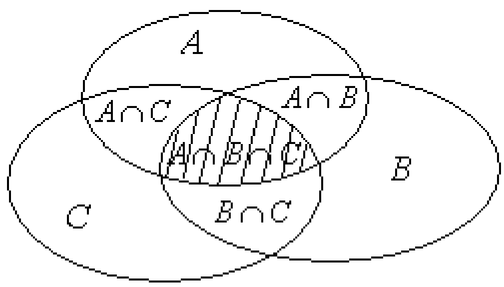


рис.1.3

Из равенства (4.2) для мощности двух конечных множеств можно получить формулы для мощности объединения трех, четырех и т. д. множеств. В частности,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{4.3}$$

Действительно, $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$

$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| -$

$- (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) = |$*учтем, что* $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C| =$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Геометрическую иллюстрацию равенства (4.3) дает диаграмма Эйлера - Венна (рис.1.3).

Пример 1. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 его учеников читал книги *A*, *B*, *C*, и сделал опрос учеников. Результаты опроса оказались таковы: книгу *A* читали 25 учеников, книгу *B* – 22, книгу *C* – тоже 22. Книги *A* или *B* читали 33 ученика, *A* или *C* – 32, *B* или *C* – 31. Все три книги прочли 10 учеников. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учеников не читали ни одной из книг?

Решение: Имеем $|A| = 25$, $|B| = |C| = 22$, $|A \cup B| = 33$, $|A \cup C| = 32$, $|B \cup C| = 31$, $|A \cap B \cap C| = 10$. Так как $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 25 + 22 - 33 = 14$.

Аналогично: $|A \cap C| = |A| + |C| - |A \cup C| = 25 + 22 - 32 = 15$,

$$|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 22 + 22 - 31 = 13.$$

Тогда число учеников, прочитавших хотя бы одну книгу, будет равно:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$= 25 + 22 + 22 - 14 - 15 - 13 + 10 = 37$.

Следовательно, число учеников, не прочитавших ни одной книги, равно: $|\overline{A \cup B \cup C}| = 40 - |A \cup B \cup C| = 40 - 37 = 3$.

Теперь найдем число учеников, прочитавших по одной книге. Только книгу A прочли $|A\cup B\cup C|-|B\cup C|=37-31=6$ учеников.

Только книгу B прочли $|A\cup B\cup C|-|A\cup C|=37-32=5$ учеников. Только книгу C прочли $|A\cup B\cup C|-|A\cup B|=37-33=4$ ученика. Таким образом, только одну книгу прочли $6+5+4=15$ учеников.

Ответ:15 учеников прочли только по одной книге, 3 ученика не прочли ни одной.

Теперь перейдем к *бесконечным множествам*. Среди таких множеств особую роль играет множество $N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ всех натуральных чисел. Другие бесконечные множества сравнивают (сопоставляют) с этим множеством.

Определение 2.

Бесконечное множество A называется ***счетным***, если между его элементами и элементами множества N можно установить взаимно - однозначное соответствие (биекцию).

Это значит, что все элементы a бесконечного множества A можно пронумеровать. После такой нумерации каждому элементу a множества A будет соответствовать некоторый элемент n множества N (n – номер элемента a). И наоборот, каждому натуральному числу n будет соответствовать вполне определенный элемент a множества A. То есть для счетного множества A будет иметь место биекция : $a \leftrightarrow n$. Количество элементов (мощность) всех счетных множеств считается одинаковой и равной $|N|$ - мощности множества N всех натуральных чисел.

Пример 2. Пусть $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ - бесконечное множество всех четных натуральных чисел. Очевидно, что множество A является подмножеством множества $N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ всех натуральных чисел ($A\subset N$). Но между элементами этих двух множеств можно установить взаимно - однозначное соответствие (биекцию). Например, такую :

$$\begin{array}{l} A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\ \} \\ \quad\ \ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ \ n,\ \ldots\} \end{array}.$$

Таким образом, множество A – счетное, и поэтому $|A| = |N|$. Но это значит, что с точки зрения теории множеств количество элементов во множествах A и N одинаково. Этот вывод парадоксален, ибо элементы множества A составляют лишь часть элементов множества N. Получается, что целое равно своей части.

Пример 3. Пусть $A = Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ множество всех целых чисел. Покажем, что между элементами этого множества и элементами множества N можно установить взаимно - однозначное соответствие (биекцию). Эта биекция имеет вид :

$$\begin{array}{ll} Z = \{0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ N = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots\} \end{array}$$

А это значит, что множество Z всех целых чисел – множество счетное, и поэтому $|Z| = |N|$. И это несмотря на то, что $N \subset Z$. Опять парадокс.

Пример 4. Покажем еще, что множество Q всех рациональных чисел (дробей) вида $q = \dfrac{m}{n}$, где m и n – целые числа, тоже счетное, и потому $|Q| = |N|$. Для этого нужно показать, что все дроби можно пронумеровать.

Покажем это. Мы всегда можем считать, что все рассматриваемые дроби $q = \dfrac{m}{n}$ несократимы, и что $n>0$. Назовем сумму $|m| + n$ *высотой рациональной дроби* $q = \dfrac{m}{n}$ (эта высота – натуральное число). Например, высоту 1 имеет только дробь $q = \dfrac{0}{1}$. Высоту 2 имеют две дроби $\dfrac{1}{1}$ и $\dfrac{-1}{1}$. Высоту 3 имеют четыре дроби $\left\{\dfrac{2}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-2}{1}; \dfrac{-1}{2}\right\}$. Ясно, что число дробей $q = \dfrac{m}{n}$ данной высоты конечно. Поэтому можно занумеровать все рациональные числа $q = \dfrac{m}{n}$ по возрастанию их высоты так, что в пределах одной высоты каждое число $\dfrac{m}{n}$ получит свой номер. Тем самым устанавливается биекция между всеми рациональными числами (элементами множества Q) и всеми натуральными числами (элементами множества N). Поэтому $|Q| = |N|$. Еще один парадокс.

Все эти парадоксы связаны с тем, что рассматриваемые нами сейчас множества бесконечны. Это – парадоксы бесконечности. А бесконечность вообще плохо поддается рациональному осмыслению.

Проиллюстрируем это на литературном примере. В одном из фантастических романов описывается космическая гостиница, в которой бесконечное число номеров, и все они заняты постояльцами. Приезжает космический путешественник и просит поселить его в гостиницу. А свободных номеров в ней нет. Но это не беда. Директор гостиницы издает распоряжение – каждому постояльцу переселиться в соседний номер: из 1-го во 2-ой, из 2-го в 3-ий, и т.д. В результате такого переселения никто из старых жильцов без номера не остался, но освободился номер 1, и в него поселили прибывшего путешественника.

Прошло некоторое время, и в гостиницу с просьбой поселения обратилось бесконечное количество участников космического съезда. Директор гостиницы и в этом случае нашел выход: он распорядился переселиться каждому из своих жильцов в номер с удвоенным номиналом. То есть из 1-го номера во 2-ой, из 2-го в 4-ый, из 3-го в 6-ой, и т.д. В итоге освободились нечетные номера 1, 3, 5, …, куда и поселились прибывшие участники съезда.

Все эти парадоксальные варианты связаны исключительно с фактором бесконечности (в гостинице – бесконечное число номеров). Если бы в гостинице этих номеров было конечное число, все эти парадоксы стали бы невозможными.

Наиболее важные свойства счетных множеств

1) Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

2) Объединение конечного или счетного множества счетных множеств счетно.

3) Всякое бесконечное множество содержит в себе счетное подмножество.

Доказательство:

1) Свойство 1 очевидно.

2) Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ - счетные множества. Все элементы этих множеств можно записать в виде таблицы:

$$
\begin{array}{llllll}
A_1: & a_{11} \rightarrow & a_{12} & a_{13} \rightarrow & a_{14} & \ldots \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
A_4: & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\ldots & & & & &
\end{array}
$$

Занумеруем эти элементы по диагоналям (вдоль стрелок). В результате все элементы объединения множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$ будут пронумерованы. То есть это объединение счетно.

3) Пусть А – бесконечное множество. Возьмем какой – либо элемент a этого множества и объявим его элементом a_1. Затем возьмем в качестве a_2 какой – либо элемент, отличный от a_1; затем a_3, отличный от a_2, и т.д. Этот процесс не может закончится из – за нехватки элементов множества A, ибо оно бесконечно. Таким образом, получаем счетное множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A$.

Несчетные множества

Естественен вопрос: существуют ли несчетные множества? То есть такие множества, элементы которых невозможно пронумеровать?

<u>Теорема</u>.

Множество A всех действительных чисел $a \in (0;1)$ несчетно.

Доказательство.

Любое действительное число a, принадлежащее интервалу (0; 1), может быть представлено бесконечной десятичной дробью вида $a = 0,n_1n_2n_3n_4\ldots$ (например, 0,5=0,50000…; $\frac{1}{3} = 0{,}3333....$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098...$). Такое представление однозначно для всех чисел $a \in (0;1)$, кроме конечных десятичных дробей, которые допускают двоякое представление: например, 0,5 = 0,50000…, и 0,5 =

0,499999…; 0,430000… и 0,429999… . Условимся не пользоваться представлением конечных десятичных дробей с использованием бесконечного количества девяток. Тогда каждое из чисел $a \in (0;1)$ будут иметь однозначное десятичное представление $a = 0,n_1 n_2 n_3 n_4...$.

А теперь покажем, что множество всех таких чисел (множество всех бесконечных десятичных дробей вида $a = 0,n_1 n_2 n_3 n_4...$) несчетно.

Предположим, от противного, что их множество счетно. То есть все эти числа можно пронумеровать. Тогда в пронумерованном виде все числа $a \in (0;1)$

можно представить в виде следующей бесконечной таблицы:

$$\begin{cases} a_1 = 0,n_{11}n_{12}n_{13}n_{14}... \\ a_2 = 0,n_{21}n_{22}n_{23}n_{24}... \\ a_3 = 0,n_{31}n_{32}n_{33}n_{34}... \\ .... \end{cases} .$$

А теперь построим действительное число $b = 0,b_1 b_2 b_3 b_4...$ ($b \in (0;1)$) по следующей схеме. В качестве b_1 возьмем любую из цифр $\{0;1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 9\}$, не совпадающую с цифрой n_{11} - первым десятичным знаком числа a_1. В качестве b_2 возьмем любую из цифр, не совпадающую с n_{22} - со вторым десятичным знаком числа a_2. В качестве b_3 возьмем любую цифру, не совпадающую с n_{33}. И так далее. Любое из построенных таким образом чисел b не совпадет ни с одним из чисел $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\}$, ибо от каждого из них оно будет отличаться хотя бы одним десятичным знаком. То есть, вопреки нашему предположению, среди чисел $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\}$ содержатся не все действительные числа $a \in (0;1)$. Таким образом, наше предположение о счетности множества действительных чисел $a \in (0;1)$ неверно – это множество несчетно. В нем несравненно (неизмеримо) больше чисел, чем в любом счетном множестве. А, значит, мощность $|A|$ этого множества выше мощности $|N|$ счетных множеств.

Мощность множества A всех действительных чисел $a \in (0;1)$ обозначается символом $\hat{c}$ и называется ***континуум***.

Итак, $|A| = \hat{c}$ - континуум. Естественно, что множества всех действительных чисел отрезка $[0;1]$ и полуинтервалов $[0;1)$ и $(0;1]$ тоже несчетны. И их мощность, как и мощность множества всех действительных чисел интервала $(0;1)$, есть континуум.

А теперь рассмотрим множество *B* всех точек в полупрямой $[0;+\infty)$. Мощность этого множества равна мощности множества *A* всех точек *a* полуинтервала $(0;1]$, ибо имеет место биекция: $-\ln a = b$ (см. рис. 1.4).

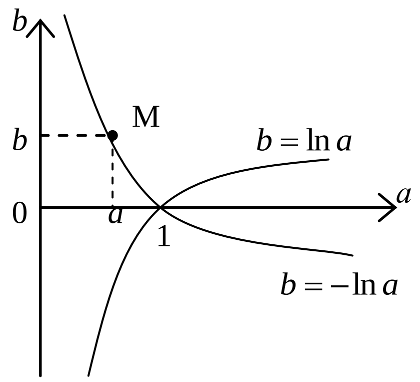


рис. 1.4

То есть действительно $|B| = |A| = \hat{c}$ - континуум.

Кстати, если *C* – множество точек всей числовой прямой, то биекция $c = \ln b$ устанавливает взаимно - однозначное соответствие между элементами *c* множества *C* $(-\infty \prec c \prec +\infty)$ и элементами *b* множества *B* $(0 \prec b \prec +\infty)$. В силу этого $|C| = |B| = \hat{c}$ - континуум.

Равенство мощностей рассмотренных выше множеств *A*, *B*, *C* означает, что с точки зрения теории множеств эти множества содержат одинаковое число элементов (точек). То есть количество точек числового полуинтервала $(0;1]$, числовой полуоси $[0;+\infty)$ и всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$ одинаково. Как это ни странно. Это – очередной парадокс, которыми так изобилуют бесконечные множества.

Можно еще доказать, что множество всех точек квадрата равномощно множеству всех точек его стороны. Множество всех точек куба тоже равномощно множеству всех точек его стороны, и т.д. И мощности всех этих множеств равны $\hat{c}$ - континууму.

Отметим, в заключение, что все задачи дискретной математики рассматриваются на конечных или счетных множествах. На множествах мощности континуум базируется непрерывная математика.

Упражнения

1.Найдите множество $C=(A-B)\cup(A\cap B)$, если:

а) $A=\{1,\ 3,\ 5\}$; $B=\{3,\ 4,\ 5\}$.

б) $A=\{2,\ 4,\ 5\}$; $B=\{1,\ 4\}$.

в) $A=\{1\}$; $B=\varnothing$.

Ответ: а) $C=\{1,\ 3,\ 5\}$; б) $C=\{2,\ 4,\ 5\}$; в) $C=\{1\}$.

2. $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$. Выпишите все подмножества множества A.

Ответ: $A_1=\{a_1\}$; $A_2=\{a_2\}$; $A_3=\{a_3\}$; $A_4=\{a_1,\ a_2\}$; $A_5=\{a_1, a_3\}$; $A_6=\{a_2,\ a_3\}$; $A_7=\{a_1, a_2,\ a_3\}$; $A_8=\varnothing$.

3. Покажите, что количество всех подмножеств конечного множества A, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Решение: Начнем с простейших случаев.

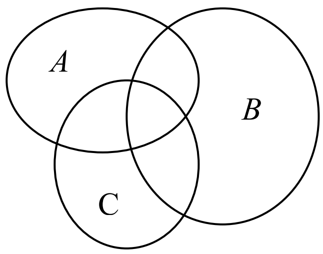
а) Пусть n=1, то есть $A=\{a_1\}$. Тогда всех возможных подмножеств этого множества всего два: $A_1=\{a_1\}$ и $A_2=\varnothing$. То есть формула 2^n при n=1 подтверждена.

б) Пусть n=2, то есть $A=\{a_1,\ a_2\}$. Тогда $A_1=\{a_1\}$, $A_2=\{a_2\}$, $A_3=\{a_1,\ a_2\}$, $A_4=\varnothing$ - все возможные подмножества A (их 4). То есть и при n=2 формула 2^n верна.

в) Пусть n=3, то есть $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$. Подмножеств этого множества, в которых не содержится элемент a_3, как показано в пункте (б), $2^2=4$. Присоединяя к каждому из них элемент a_3, получим еще 4 подмножества. В итоге их оказывается 8, то есть 2^3.

Аналогично при n=4 получаем $2^3 \cdot 2 = 2^4$ подмножеств, и т.д. Формула 2^n доказана.

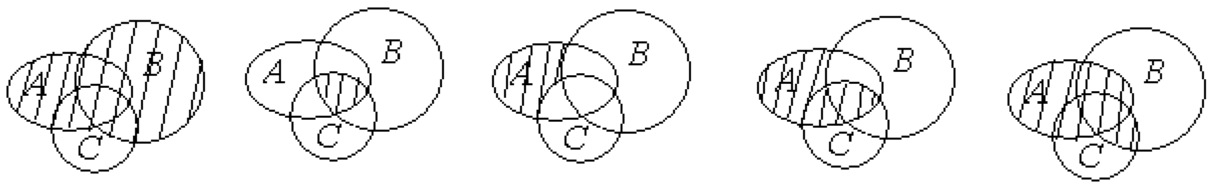
4. Множества *A*, *B*, *C* представляют собой области плоскости, изображенные ниже на рисунке:



Изобразите следующие множества :

$D_1 = A \cup B$; $D_2 = A \cap B \cap C$; $D_3 = (A - B) - C$; $D_4 = A - (B - C)$; $D_5 = A \cup (B \cap C)$.

Ответ:



$D_1 = A \cup B$ $D_2 = A \cap B \cap C$ $D_3 = (A - B) - C$ $D_4 = A - (B - C)$ $D_5 = A \cup (B \cap C)$

5. В соревнованиях по легкой атлетике 82% от числа участников выполнили обязательный норматив по прыжкам в высоту, 65% - по прыжкам в длину и 70% - по бегу. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив хотя бы по двум дисциплинам. Какой процент участников соревнований выполнили норматив по всем трем видам спорта?

Решение: Множество всех участников соревнований, в соответствии с условиями задачи, разобьем на 4 подмножества *X*, *Y*, *Z*, *T*:

Множество	Выполнили норматив по прыжкам в высоту	Выполнили норматив по прыжкам в длину	Выполнили норматив по бегу	Количество элементов множества
X	+	+	-	x
Y	+	-	+	y
Z	-	+	+	z
T	+	+	+	t

Пусть n – общее количество участников соревнований. Тогда, согласно условиям задачи, $\begin{cases} x+y+t=0{,}82n \\ x+z+t=0{,}65n \\ y+z+t=0{,}70n \\ x+y+z+t=n \end{cases}$. Решая эту систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными $\{x;y;z;t\}$, получим: $t=0{,}17n$.

Ответ: 17%

6.Найдите мощность множества C, указанного в задании 1.

Ответ: а) $|C|=3$; б) $|C|=3$; в) $|C|=1$.

7. Найдите мощность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел.

Решение: Указанное множество является объединением счетного множества числовых последовательностей, каждая из которых является конечным множеством. Выписывая эти конечные множества одно за другим, получим некую последовательность натуральных чисел, которые можно одно за другим пронумеровать. То есть такое множество счетно. А значит, его мощность равна $|N|$.

8. Постройте график функции $y=\ln\dfrac{x-a}{b-x}$ ($a<x<b$), и на его основе подтвердите взаимно однозначное соответствие между точками x интервала $(a;b)$ и точками y числовой прямой $(-\infty;+\infty)$. Тем самым будет доказано, что любой числовой интервал $(a;b)$ и вся числовая ось имеют одинаковую мощность $\hat{c}$ - континуум.

9. Постройте график функции $y=a+\ln\dfrac{b-a}{b-x}$ ($a\le x\langle b$), и на его основе подтвердите, что луч $[a;b)$ и луч $[a;+\infty)$ имеют одинаковую мощность – континуум.

§5. Комбинаторика

Комбинаторика - это раздел дискретной математики, изучающий разнообразные *соединения элементов*. Под элементами понимаются любые однотипные вещи: предметы, буквы, числа, живые существа и т.д. Различают три вида соединений элементов:

- *Размещения;*
- *Перестановки;*
- *Сочетания.*

1. *Размещения.* Пусть рассматривается конечное множество из n упорядоченных, т.е. пронумерованных, элементов ($a_1; a_2;\ldots a_n$). Будет составлять из этих n элементов всевозможные *упорядоченные группы* по m элементов в каждой группе, где m – любое натуральное число, не превосходящее n. Эти группы будем считать различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или даже только порядком следования элементов в группе (у каждого элемента в упорядоченной группе есть свое учитываемое место). Такие группы называются *размещениями из* n *элементов по* m *элементов в каждом размещении*. Их общее число обозначается символом A_n^m, и находится оно по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{5.1}$$

Напомним, что выражение $n!$ называется эн–факториал, и определяется оно так:

$$0!=1; \quad 1!=1; \quad 2!= 1\cdot 2=2; \quad 3!=1\cdot 2\cdot 3=6; \quad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;\ldots \quad n!= 1\cdot 2\cdot 3\cdots n. \tag{5.2}$$

Доказательство формулы (5.1).

1) Составим сначала все возможные размещения из n элементов ($a_1; a_2;\ldots a_n$) по одному элементу в каждом размещении и подсчитаем их число A_n^1. Эти размещения – просто отдельно взятые элементы $a_1; a_2;\ldots a_n$. Их количество равно n. То есть

$$A_n^1 = n \tag{5.3}$$

2) Составим теперь все возможные размещения из n элементов по два элемента в каждом размещении и подсчитаем их число A_n^2. Эти размещения тоже очевидны:

$$\begin{array}{llll} a_1\,a_2 & a_2\,a_1 & a_3\,a_1 & a_n\,a_1 \\ a_1\,a_3 & a_2\,a_3 & a_3\,a_2 & a_n\,a_2 \\ a_1\,a_4 & a_2\,a_4 & a_3\,a_4 & a_n\,a_3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_1\,a_n & a_2\,a_n & a_3\,a_n & a_n\,a_{n-1} \end{array} \qquad (5.4)$$

В каждом из столбцов (2.4) n -1 размещение, а всех столбцов n, поэтому

$$A_n^2 = n(n-1) \qquad (5.5)$$

3) Составим все возможные размещения из n элементов по три элемента в каждом размещении и подсчитаем их число A_n^3. Эти размещения получим, если возьмем за основу все возможные размещения (5.4) по два элемента и добавим по очереди справа к каждому из них любой из оставшихся n-2 элементов. Таким образом, из каждого размещения (5.4) по два элемента можно образовать n-2 размещения по три элемента. Например, из одного размещение $a_1\,a_2$, содержащего два элемента, можно образовать следующее n-2 размещений по три элемента:

$$a_1\,a_2\,a_3;\quad a_1\,a_2\,a_4;\quad a_1\,a_2\,a_5;\ldots\ldots\ldots\; a_1\,a_2\,a_n \qquad (5.6)$$

Следовательно,

$$A_n^3 = A_n^2 \cdot (n-2) = n(n-1)(n-2) \qquad (5.7)$$

Аналогично:

$$A_n^4 = A_n^3 \cdot (n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3) \qquad (5.8)$$

$$A_n^5 = A_n^4 \cdot (n-4) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

………………………………………

То есть

$$A_n^m = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)\ldots.(n\text{-}m\text{+}1) \qquad (5.9)$$

Итак, мы получили формулу для A_n^m при произвольном m (m=1,2,…n).

Преобразуем ее к более удобному виду. Для этого домножим и разделим выражение (5.9) на убывающие недостающие множители $(n\text{-}m)(n\text{-}m\text{-}1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ так, чтобы последний множитель в (5.9) стал 1:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (5.10)$$

Формула (5.1) доказана.

Для примера подсчитаем общее количество всех возможных размещений из трех элементов ($a_1; a_2; a_3$) по одному, по два и по три элемента. Причем сделаем это и непосредственно, составив все эти размещения и пересчитав их, и по формуле (5.1):

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right] A_3^1 = 3; \qquad \left.\begin{matrix} a_1a_2 \\ a_1a_3 \\ a_2a_1 \\ a_2a_3 \\ a_3a_1 \\ a_3a_2 \end{matrix}\right] A_3^2 = 6; \qquad \left.\begin{matrix} a_1a_2a_3 \\ a_1a_3a_2 \\ a_2a_1a_3 \\ a_2a_3a_1 \\ a_3a_1a_2 \\ a_3a_2a_1 \end{matrix}\right] A_3^3 = 6 \qquad (5.11)$$

Эти же результаты дает и формула (5.1):

$$A_3^1 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3; \quad A_3^2 = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6; \quad A_3^3 = \frac{3!}{0!} = \frac{6}{1} = 6 \qquad (5.12)$$

Примечание 1. Термин «размещения» для описанных выше групп элементов связан с тем, что выбор *упорядоченной* группы m элементов из данных n

элементов равносилен размещению m различных предметов на n местах. И число всех возможных таких размещений равно A_n^m. Например, $A_4^2=12$ – это число всех возможных размещений двух человек в 4-х местном купе.

2. ***<u>Перестановки.</u>*** Перестановками из данной совокупности n элементов $(a_1; a_2; ...a_n)$ называются различным образом упорядоченные (по разному переставленные) комбинации *всех этих элементов*. Их общее количество обозначается символом P_n. Так как перестановки – это по сути размещения из n элементов по n элементов в каждом размещении, то

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \tag{5.13}$$

3. ***<u>Сочетания.</u>*** Сочетаниями из n элементов по m элементов в каждом сочетании называются (в отличие от размещений) всевозможные *неупорядоченные* группы по m элементов в каждой группе. Неупорядоченные - это значит, что важно, какие элементы содержатся в каждом сочетании, а в каком порядке они там находятся – это неважно. Различные сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Общее их количество обозначается символом C_n^m, и находится оно по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{5.14}$$

Доказательство формулы (5.14)

Очевидно, что если взять все возможные сочетания из n элементов по m элементов и сделать в каждом из них все возможные перестановки, то в итоге получим все возможные размещения из n элементов по m элементов в каждом размещении. Отсюда следует:

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m, \text{ и значит } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{5.15}$$

Для примера подсчитаем общее количество всех возможных сочетаний из трех элементов ($a_1; a_2; a_3$) по одному, по два и по три элемента. Причем сделаем это и непосредственно, составив все эти сочетания и пересчитав их, и по формуле (5.14):

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right] C_3^1 = 3 \qquad \left.\begin{matrix} a_1a_2 \\ a_1a_3 \\ a_2a_3 \end{matrix}\right] C_3^2 = 3 \qquad a_1a_2a_3 \,]\, C_3^3 = 1 \tag{5.16}$$

Эти же результаты дает и формула (5.14):

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3; \quad C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3; \quad C_3^3 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = \frac{6}{1\cdot 6} = 1; \tag{5.17}$$

Кстати, комбинации в (5.11) и в (5.16) наглядно демонстрируют разницу между размещениями и сочетаниями.

Примечание 2. Термин «сочетания» связан с тем, что выбор *неупорядоченной* группы m элементов из данных n элементов равносилен простому выделению (сочетанию) m предметов из данных n предметов. И число всех возможных таких сочетаний равно C_n^m. Например, C_4^2=6 – это число всех возможных пар тузов, которые можно образовать (сочетать) из четырех имеющихся в колоде тузов. Или это число всех возможных способов забронировать два места в 4-х местном купе.

Примечание 3. Числа C_n^m называют еще *биномиальными коэффициентами*, так как они входят в формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \tag{5.18}$$

($n-$ натуральное число, a и b - произвольные действительные числа). Полагая в этой формуле $a=1$ и $b=1$, получим интересное свойство биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \tag{5.19}$$

А полагая в ней $a=1$ и $b=-1$, получим не менее интересное свойство:

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0 \tag{5.20}$$

Можно привести и еще ряд важных и интересных формул, связывающих биномиальные коэффициенты, но на этом останавливаться не будем.

Выводя формулы (5.1), (5.13) и (5.14) для общего числа размещений, перестановок и сочетаний, мы полагали, что в каждом из указанных соединений любой из элементов множества ($a_1; a_2; ..... a_n$) может встретиться только один раз. То есть повторять в них элементы нельзя. Если же повторять их всё же можно, то мы придём к *размещениям, перестановкам и сочетаниям с повторениями*.

4. *Размещения с повторениями.* Начнём с рассмотрения частного случая. Пусть множество элементов составляет всего три элемента ($a_1; a_2; a_3$). Составим из них все возможные размещения с повторениями по два элемента в каждом размещении и пересчитаем их. Очевидно, их будет 9 – те 6 , что представлены в (5.11) и в которых оба элемента разные, и ещё три размещения $a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3$ с повторяющимися элементами. Если обозначить общее число всех возможных размещений из трёх элементов по два в каждом размещении символом $\tilde{A}_3^2$, то получим: $\tilde{A}_3^2=9$.

Впрочем, мы могли подсчитать это число и иначе. Составляя любое размещение из двух элементов, на первое место в таком размещении можно поставить любой из данных трёх элементов (три варианта). На второе место – тоже любой из трёх элементов (тоже три варианта). Комбинируя каждый элемент, стоящий на первом месте, с каждым элементом, стоящим на втором месте, получим 3^2=9 всех возможных комбинаций. То есть $\tilde{A}_3^2=3^2=9$.

А теперь легко понять, что если всех элементов не три, а n, и из них составляются все возможные размещения с повторениями по m элементов в каждом размещении, то их общее число $\tilde{A}_n^m$ найдётся по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \tag{5.21}$$

5. ***<u>Сочетания с повторениями</u>.*** Опять начнём с частного случая. А именно, подсчитаем $\tilde{C}_3^2$ – общее число всех возможных сочетаний с повторениями из трёх элементов ($a_1; a_2; a_3$) по два элемента в каждом сочетании. Этих сочетаний, очевидно, будет 6 – те 3, которые представлены в (5.16) и в которых оба элемента разные, и ещё три сочетания $a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3$ с повторяющимися элементами. То есть $\tilde{C}_3^2=6=C_4^2$. И вообще, имеет место общая формула:

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \tag{5.22}$$

Доказательство формулы (5.22).

Каждое из сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов в каждом сочетании однозначно определяется, если указать, сколько элементов каждого из n типов в него входит. Поставим в соответствие каждому возможному сочетанию последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: сначала напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание; далее поставим нуль и после него напишем столько единиц, сколько элементов второго типа содержит сочетание, и т.д. – до последней группы единиц, соответствующих элементам последнего, n–го типа. Таким образом, каждому сочетанию будет соответствовать последовательность из m единиц и n-1 нулей. И наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается соответствующее сочетание. Поэтому количество $\tilde{C}_n^m$ всех возможных сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов в каждом сочетании равно числу всех возможных последовательностей из m единиц и n-1 нулей. То есть равно числу способов разместить m единиц на $n+m$-1 местах. А значит, равно C^m_{n+m-1}.

Доказательство закончено.

6. *<u>Перестановки с повторениями</u>*. Пусть среди элементов ($a_{1;}\ a_{2;}\ ....a_n$) содержится лишь k различных элементов ($k<n$), причём первый из них повторяется n_1 раз, второй n_2 раз, …k-ый n_k раз. Очевидно, что $n_1+n_2+...\ n_k=n$. Тогда число всех возможных перестановок из таких n элементов обозначается символом $P_n(n_1;n_{2;}....n_k)$ и находится по формуле:

$$P_n(n_1;n_2;....n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{5.23}$$

Доказательство формулы (5.23).

В самом деле, если бы все n элементов были разными, то число всех возможных перестановок из них, согласно (5.13), было бы равно $P_n=n!$. Но среди них разных элементов лишь k, остальные $n–k$ элементов повторяют эти k элементов. В частности, первый из этих k элементов повторяется n_1 раз. Сделав любую перестановку из этих n_1 одинаковых элементов (не трогая остальных!) мы ничего не нарушим ни в какой перестановке из n элементов. А вот если бы все эти n_1 повторяющихся элементов были разными, то сделав любую их перестановку, мы получили бы другую перестановку из n элементов. Количество всех возможных перестановок из n_1 элементов равно $n_1!$. Значит, наличие этих n_1 одинаковых элементов уменьшает в $n_1!$ раз общее количество всех возможных перестановок из n элементов по сравнению с тем случаем, когда все n элементов были бы разными. Тот же эффект производит наличие второго повторяющегося n_2 раз элемента, третьего, … k-ого. В итоге и приходим к формуле (5.23).

А теперь рассмотрим примеры на применение полученных выше формул.

Пример 1. Сколькими различными способами могут занять места в президиуме 5 человек, если в президиуме 8 мест?

Решение. Искомое число N есть число всех возможных размещений пяти элементов (людей) на восьми местах. То есть

$$N = A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

Пример 2. В посёлке устанавливается телефонная сеть с трёхзначными телефонными номерами. Сколько всего можно установить телефонных номеров? Сколько из них будет тех, которые содержат: 1) три разные цифры? 2) две одинаковые цифры? 3) три одинаковые цифры?

Решение. Всех возможных трёхзначных телефонных номеров будет, очевидно, 1000: это номера 000, 001, 002, … 999.

1) Номеров с тремя разными цифрами будет, очевидно, столько, сколько существует всех возможных соединений (комбинаций) из 10 цифр 0,1,2,…9 по три цифры в каждом соединении. Так как в этих соединениях важен порядок следования цифр (например, 137 и 173 – это разные номера), то этими соединениями будут размещения. А значит, их общее количество N_1 можно найти по формуле (5.1):

$$N_1 = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1} = 720$$

3) Пропуская вопрос (2), ответим на вопрос (3). Номеров с тремя одинаковыми цифрами будет, очевидно, 10. Это номера 000, 111, 222, … 999. То есть $N_3 = 10$.

2) Все остальные номера – с двумя одинаковыми цифрами. Следовательно, их общее количество

$$N_2 = 1000 - (N_1 + N_3) = 1000 - (720 + 10) = 270.$$

Пример 3. Сколько всего диагоналей у выпуклого n–угольника?

Решение: Соединяя каждую пару вершин n–угольника, получим либо диагональ, либо сторону n–угольника. Число всех различных пар вершин n-угольника равно числу всех возможных соединений из n элементов (вершин многоугольника) по два элемента (по две вершины) в каждом соединении. Так как порядок следования элементов в этих парах, очевидно, не важен (диагональ, соединяющая, например, 2-ю и 5-ю вершину – это та же диагональ, которая соединяет 5-ю и 2-ю вершину), то такими парными соединениями будут сочетания из n элементов по два элемента в каждом сочетании. Следовательно, их общее число равно C_n^2. В это число входят и сами n сторон многоугольника. Поэтому искомое число N диагоналей n-угольника найдётся по формуле:

$$N = C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Пример 4. В чемпионате области по футболу участвуют 20 команд, причём каждые две из них встречаются между собой два раза (игры идут в два круга). Сколько всего матчей играется в течение сезона?

Решение. В первом круге состоится столько матчей, сколько существует сочетаний из 20 команд по две в каждом сочетании. То есть их число равно:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона их состоится 190·2=380.

Пример 5. Сколькими различными способами можно рассадить n человек за круглым столом?

Решение. Общее число всех способов, с помощью которых n человек может занять n мест за любым (не только круглым) столом равно, очевидно, числу всех размещений n элементов (людей) на n местах. То есть равно $A_n^n = P_n = n!$ Но если стол круглый, то любая циклическая перестановка (одновременная пересадка всех вправо или влево на одно или несколько мест) не нарушает порядка рассаживания людей за столом. А таких циклических пересаживаний всего n. Поэтому искомое число N_n рассаживания n человек за круглым столом равно:

$$N_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

В частности, N_2=1; N_3 = 2; N_4 = 6; N_5 = 24;…..

Пример 6. Автомобильные номера состоят из двух букв (всего используется 30 букв) и трёх цифр (используются все 10 цифр). Сколько всего автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

***Решение*:** Различных пар букв будет столько, сколько можно составить размещений с повторениями из 30 букв по две в каждом размещении. То есть, согласно формуле (2.18), их будет:

$$\tilde{A}_{30}^{2}=30^2=900.$$

Аналогично различных троек цифр будет:

$$\tilde{A}_{10}^{3}=10^3=1000.$$

(впрочем, это и так очевидно). Комбинируя (соединяя) теперь каждую пару букв с каждой тройкой цифр, получим искомое общее число N различных автомобильных номеров:

$N = 900 \cdot 1000 = 900000.$

Пример 7. Имеются две колоды по 36 карт. Из каждой колоды вынимаются по одной карте. Сколько различных пар карт может быть при этом образовано?

Решение. В образовываемых парах карт порядок их следования, очевидно, не важен. Поэтому эти пары – различные сочетания из 36 карт. По условию, среди этих пар могут оказаться и пары с одинаковыми картами. То есть образованные пары карт – это сочетания с повторениями. А значит, их общее число:

$$N = \tilde{C}_{36}^{2} = C_{37}^{2} = \frac{37!}{2! \cdot 35!} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$$

Пример 8. Сколько всех возможных перестановок букв можно сделать в слове «математика»?

Решение. В слове «математика» всего 10 букв, из которых буква *а* повторяется 3 раза, буква *м* – два раза, буква т – два раза, остальные буквы (*е, и, к)* по разу. Поэтому искомое число *N* перестановок в слове «математика» - это число перестановок из 10 элементов (букв) с повторениями. Согласно формуле (2.20),

$$N = P_{10}(3;2;2;1;1;1) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$$

Упражнения

1. В студенческой группе 25 студентов. В ней нужно выбрать старосту и профорга. Сколькими различными способами можно это сделать?

Ответ: 600.

2. В студенческой группе 25 студентов. В ней нужно назначить двух дежурных. Сколькими различными способами можно это сделать?

Ответ: 300.

3. В пятом классе изучается 12 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть 4 урока? Решите задачу в предположении, что:

а) порядок уроков важен;

б) порядок уроков не важен.

Ответ: а) 11880; б) 495.

4. Пять человек выстраивают в шеренгу. Сколькими различными способами можно это сделать?

Ответ: 120.

5. Сколько различных символов можно закодировать с помощью 8-значных двоичных чисел (чисел, содержащих в своей записи лишь нули и единицы общим числом 8)?

Ответ: 256.

6. Группа хоккеистов содержит 6 нападающих, 4 защитников, 2 вратарей. Сколько различных хоккейных команд можно из них составить? Команда состоит из трех нападающих, двух защитников и одного вратаря.

Ответ: 240.

7. Сколькими различными способами можно распределить 6 различных учебников между тремя студентами по два учебника каждому?

Ответ: 90 способами.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют различные 5-значные числа. Сколько из них тех, которые не делятся на 5?

Ответ: $N = P_5 - P_4 = 96$.

9. Сколькими различными способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных шашек?

Ответ: $N = C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$.

10. Плоская фигура разбита на 4 части, и каждая часть должна быть закрашена определенным цветом. Сколькими способами можно раскрасить фигуру, если имеется 7 цветов краски?

Ответ: $N = 7^4 = 2401$.

11. Сколькими различными способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 вида пирожных?

Ответ: $N = \tilde{C}_4^8 = C_{11}^8 = 165$.

12. Сколькими различными способами можно расставить шахматные фигуры первой горизонтали (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, 1 ферзя и 1 короля) на этой горизонтали?

Ответ: $N = P_8(2,2,2,1,1) = 5040$.

§6. Метод математической индукции

Индукция (лат. «*inductio*» - наведение) – это переход от частного к общему. Метод математической индукции применяется для доказательства истинности некоторого утверждения $A(n)$, зависящего от натурального числа $n \in N$, для всех $n \geq n_0$, где n_0 - некоторое фиксированное натуральное число (обычно $n_0 = 1$).

Суть метода. Утверждение $A(n)$ является истинным для всех $n \geq 1$, если выполнены два условия:

1) Утверждение $A(1)$ истинно (***базис индукции***).
2) Для любого $k \geq 1$ из предположения, что $A(k)$ справедливо, следует, что и $A(k+1)$ тоже справедливо (***индуктивный переход***).

В самом деле, если оба эти условия выполнены, то утверждение $A(n)$ для $n = 1$ выполняется в соответствии с базисом индукции; при $n = 2 = 1 + 1$ оно выполняется в соответствии с индуктивным переходом; при $n = 3 = 2 + 1$ - снова выполняется в соответствии с индуктивным переходом, и т.д. Таким образом, утверждение $A(n)$ оказывается справедливым для всех $n \geq 1$.

Пример 1. Докажем, что для любых $n \in N$ справедлива формула:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ . \tag{6.1}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1) Проверим $A(1)$, то есть справедливость формулы (6.1) при n=1. Имеем $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$; 1=1 – верно.

2) Предположим, что формула (6.1) верна при $n=k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (A(k) \text{ - верно}), \qquad (6.2),$$

и проверим, выполняется ли индуктивный переход, то есть выполняется ли утверждение $A(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\ . \qquad (6.3).$$

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, что по предположению} \\ 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} \end{array} \right| = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \ldots = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad (6.4).$$

То есть утверждение $A(k+1)$ (формула (6.3)) имеет место. А, значит, формула (6.1) доказана.

Пример 2. Докажем неравенство Я. Бернулли:

$$\text{если } 1+x \ge 0, \text{ и } n \in N, \text{ то } (1+x)^n \ge 1+nx \qquad (6.5).$$

Решение. Неравенство Бернулли будем рассматривать как утверждение $A(n)$. Подтвердим его истинность с помощью метода математической индукции.

1) Проверим истинность $A(1)$: если $n=1$, то $(1+x)^1 \ge 1+x$ - верно.

2) Предположим, что утверждение $A(k)$ верно, то есть что $(1+x)^k \ge 1+kx$, и проверим, выполняется ли утверждение $A(k+1)$: $(1+x)^{k+1} \ge 1+(k+1)x$.

Имеем:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \ge (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \ge 1+(k+1)x.$$

То есть утверждение $A(k+1)$ верно. А, значит, неравенство (6.5) доказано.

Упражнения

1. Докажите, что при любом $n \ge 1$ сумма $4^n + 15n - 1$ делится на 9.
2. Докажите, что при любом $n = 4, 8, 12, \ldots, 4m, \ldots$ сумма $7^1 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^n$ делится на 100.
3. Докажите, что $2^n \succ n^2$ для любого $n \ge 5$.

Глава 2

Математическая логика

§1. Высказывания. Основные операции над высказываниями

Математическая логика изучает высказывания. ***Высказыванием*** называется некоторое повествовательное утверждение, про которое можно однозначно сказать, истинно оно или ложно. Например, высказывание A:$\{5<3\}$ – ложь; высказывание B:{во всякий треугольник можно вписать окружность} – истина; высказывание C:{число 417 делится на 3} – истина; высказывание D:{слон – это птица} – ложь. И т. д.

Предполагается, что:

1) всякое высказывание является либо истинным, либо ложным, то есть третьего не дано. Это положение называется ***закон исключения третьего***.

2) Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (***закон противоречия***).

Основные операции над высказываниями

Выше были приведены примеры простейших высказываний. Из простых высказываний при помощи соединительных слов (союзов «и», «или», выражений «если … то», «тогда, и только тогда, когда …», и т.д.), называемых ***логическими связками***, можно образовать другие, более сложные высказывания. Например, высказывание A:{число 12 четное и делится на 3} – истина; высказывание B:{число 12 четное и делится на 5} – ложь; высказывание C:{каждое натуральное число является четным или нечетным} – истина; высказывание D:{натуральное число делится на 4 тогда, и только тогда, когда оно четное} – ложь. И т. д.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\overline{A}$, утверждающее, что высказывание A не выполняется (оно ложно). Например, если A:{Иванов родился в 1990 году}, то $\overline{A}$:{Иванов родился не в 1990 году}.

Высказывание $\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})}$ называется ***двойным отрицанием*** высказывания *A*. Имеет место равенство: $\overline{\overline{A}} = A$ (***закон двойного отрицания***).

Определение 1.

Логической суммой (дизъюнкцией) двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, истинное в случае, если хотя бы одно из высказываний, *A* или *B*, истинно.

Дизъюнкция обозначается символом $A \vee B$, читается «*A* или *B*», и соответствует союзу «или». Например: у больного простуда (*A*) или грипп (*B*) – это $A \vee B$.

Определение 2.

Логическим произведением (конъюнкцией) двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, истинное тогда, и только тогда, когда оба высказывания, *A* и *B*, истинны.

Конъюнкция обозначается символом $A \wedge B$ (или $A \cdot B$), читается «*A* и *B*» и соответствует союзу «и». Например, преступник молод (*A*) и мужчина (*B*) – это $A \cdot B$.

Определение 3.

Операция, обозначаемая символом $A \to B$, называется ***логическим следствием (импликацией)*** двух высказываний и читается «из *A* следует *B*».

При этом высказывание *A* называется ***посылкой***, а событие *B* – ***следствием***. Импликация представляет собой, по определению, ложное высказывание в том и только в том случае, когда посылка *A* истинна, а заключение *B* – ложно. Из данного определения следует, что при ложной посылке *A* импликация $A \to B$ истинна независимо от того, истинно или ложно заключение *B*. Это условие называется ***принципом ложной посылки***. И в этом принципе есть свой логический смысл, ибо все, что следует из лжи, возможно, со всем можно согласиться, все можно признать истинным. Например, если 2 ·2=5, то тогда и слон – птица. Поэтому, если *A*:{2 ·2=5}, *B*:{2 ·2=4}, *C*:{слон – это птица}, *D*:{орел – это птица}, то имеют место импликации:

$A \to B$ - истина; $A \to C$ - истина; $A \to D$ - истина; $B \to C$ - ложь; $B \to D$- истина; $D \to A$ ложь.

<u>Определение</u> 4.

Эквиваленцией двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания *A* и *B* истинны или когда оба они ложны.

Эквиваленция обозначается символом $A \sim B$ или $A \leftrightarrow B$ и читается «*A* эквивалентно *B*», или «*A* равносильно *B*». Например, пусть *A*:{четырехугольник *ABCD* - параллелограмм}; *B*:{противоположные стороны четырехугольника *ABCD* попарно равны}. Здесь $A \sim B$.

<u>Определение</u> 5.

Сложением по модулю 2 высказываний *A* и *B* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда одно из этих высказываний истинное, а другое ложное.

То есть когда «либо *A*, либо *B*». Обозначается эта логическая операция символом $A \oplus B$. Например, пусть *A*:{пациент жив}; В:{пациент мертв}. Тогда $A \oplus B$:{пациент либо жив, либо мертв}. И, естественно, $A \oplus B$ - истина.

Символы {$\vee$, ($\cdot$), $\to$, ~, $\oplus$} логических операций называются ***логическими связками***.

Для любых высказываний *A* и *B* (истинных или ложных) истинность или ложность их дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции и сложения по модулю 2 определяется приводимой ниже таблицей 1, называемой ***таблицей истинности логических операций***:

Таблица 1.

A	B	$A \vee B$	$A \cdot B$	$A \to B$	$A \sim B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Здесь A=1 означает, что высказывание A – истина. А запись A=0 означает, что высказывание A – ложь.

С помощью введенных выше логических связок из простых (элементарных) высказываний можно строить сложные высказывания. Например, $A \cdot B \vee \overline{A} \cdot B$; $(A \sim B) \vee A \cdot B$; $(A \to B) \oplus C$, и т. д. Такие выражения называются ***логическими формулами***. Каждая из них может принимать значение 1 (истина) или 0 (ложь) и, будучи обозначена одной буквой, может быть рассмотрена как элементарное высказывание. Истинность или ложность сложного высказывания зависит от того, истинны или ложны составляющие его элементарные высказывания (A, B, …). Составив таблицу истинности сложного высказывания, мы получим ответ на вопрос о его истинности или ложности для любых вариантов истинности или ложности элементарных высказываний, его составляющих.

Любые две логические формулы считаются ***равносильными (тождественными***, если таблицы их истинности полностью совпадают. А переход от логической формулы к ей равносильной называется ***равносильным (тождественным) преобразованием***. Для обозначения равносильности применяется символ «≡» или «$\Leftrightarrow$».

Например, $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$. Доказательством этого служит таблица 2:

Таблица 2.

A	B	$A \to B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \to \overline{A}$
1	1	**1**	0	0	**1**
1	0	**0**	1	0	**0**
0	1	**1**	0	1	**1**
0	0	**1**	1	1	**1**

Определение 6.

Высказывание называется ***тождественно истинным (тавтологией)***, если оно истинно всегда, независимо от того, истинны или ложны составляющие его высказывания.

Например,

$(A \vee \overline{A}) \equiv 1$; $(A \cdot B \to A) \equiv 1$; $(A \to (B \to A)) \equiv 1$

- тавтологии. Действительно:

Таблица 3

A	B	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$	$A \cdot B$	$A \cdot B \to A$	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
1	1	0	**1**	1	**1**	1	**1**
1	0	0	**1**	0	**1**	1	**1**
0	1	1	**1**	0	**1**	0	**1**
0	0	1	**1**	0	**1**	1	**1**

Столбцы $A \vee \overline{A}$, $A \cdot B \to A$, $A \to (B \to A)$ состоят из одних единиц. Значит, они действительно тавтологии.

Определение 7.

Высказывание называется ***тождественно ложным*** (***противоречием***), если оно ложно всегда, независимо от того, истинны или ложны составляющие его высказывания. В таблице истинности тождественно ложным высказываниям соответствуют столбцы, состоящие из одних нулей. Например, $A \cdot \overline{A} \equiv 0$ - тождественно ложное высказывание.

Примечание. Пусть $F \equiv F(A;B;C;...)$ - сложное высказывание (логическая формула). Следует различать равенства $F(A;B;C;...) = 1$ и $F(A;B;C;...) \equiv 1$. Первое из них говорит о том, что *при заданных* значениях высказываний $A, B, C ...$ значение $F = 1$ (F – истина). При других значениях $A, B, C ...$ может оказаться, что $F = 0$ (F – ложь). А второе равенство $F(A;B;C;...) \equiv 1$ говорит о том, что $F \equiv 1$ (F – истина) *при любых* значениях высказываний $A, B, C ...$. То есть $F(A;B;C;...)$ - тавтология.

Точно так же следует различать равенства $F(A;B;C;...) = 0$ и $F(A;B;C;...) \equiv 0$.

§2. Свойства операций над высказываниями

1. Коммутативность (переместительный закон) дизъюнкции и конъюнкции:

$$A \vee B \equiv B \vee A; \qquad A \cdot B \equiv B \cdot A \tag{2.1}$$

2. Ассоциативность (сочетательный закон) дизъюнкции и конъюнкции:

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C \ ; \qquad (A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C) \equiv A \cdot B \cdot C \tag{2.2}$$

3. Дистрибутивность (распределительный закон) одной операции относительно другой:

$$(A \vee B) \cdot C \equiv (A \cdot C) \vee (B \cdot C) \ ; \qquad (A \cdot B) \vee C \equiv (A \vee C) \cdot (B \vee C) \tag{2.3}$$

4. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} \equiv A \tag{2.4}$$

5. Закон исключения третьего:

$$A \vee \overline{A} \equiv 1 \text{ - всегда истина} \tag{2.5}$$

6. Закон противоречия:

$$A \cdot \overline{A} \equiv 0 \text{ - всегда ложь} \tag{2.6}$$

7. Идемпотентность (операции высказывания с самим собой):

$$A \vee A \equiv A \ ; \qquad A \cdot A \equiv A \tag{2.7}$$

8. Законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \cdot \overline{B} \ ; \qquad \overline{A \cdot B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \tag{2.8}$$

9. Законы поглощения:

$$A \vee (A \cdot B) \equiv A \ ; \qquad A \cdot (A \vee B) \equiv A \ ; \qquad A \vee (\overline{A} \cdot B) \equiv A \vee B \tag{2.9}$$

10.Склеивание:

$$A\cdot(B\vee\overline{B})\equiv A\cdot B\vee A\cdot\overline{B}\equiv A \qquad (2.10)$$

11.Операции с 0 и 1:

$$A\vee 0\equiv A;\quad A\cdot 0\equiv 0;\quad A\vee 1\equiv 1;\quad A\cdot 1\equiv A;\quad \overline{0}\equiv 1;\quad \overline{1}\equiv 0 \qquad (2.11)$$

12.Выражения импликации, эквиваленции и сложения по модулю 2 через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:

$A\to B\equiv\overline{A}\vee B$; $\quad A\sim B\equiv(A\to B)\cdot(B\to A)\equiv A\cdot B\vee\overline{A}\cdot\overline{B}$;

$$A\oplus B\equiv A\cdot\overline{B}\vee\overline{A}\cdot B \qquad (2.12)$$

13.Тавтологии:

$A\to A\equiv 1$; $A\to(B\to A)\equiv 1$; $(A\cdot B)\to A\equiv 1$; $(A\cdot B)\to B\equiv 1$;

$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))\equiv 1$ - цепное рассуждение;

$((A\to B)\to A)\to A\equiv 1$ - закон Пирса; (2.13)

$(\overline{B}\to\overline{A})\to(A\to B)\equiv 1$ - закон контрапозиции (рассуждение от противного)

$((A\to C)\cdot(B\to C))\to((A\vee B)\to C)\equiv 1$ - правило разбора случаев.

В справедливости каждого из этих свойств (если оно не очевидно) можно убедиться, если построить таблицу истинности левой и правой его части.

Примечание. Таблица истинности для каждого сложного высказывания содержит в соответствующем ему столбце 4 строки, если в этом сложном высказывании фигурируют лишь два элементарных высказывания A и B. Таковыми являются, в частности, таблицы 1 – 3 . А если в сложном высказывании содержатся 3 элементарных высказывания A, B и C, то, чтобы таблица истинности содержала все варианты истинности и ложности этих трех высказываний, в ней должно быть $2^3=8$ строк. При четырех элементарных высказываниях этих строк будет уже $2^4=16$. И т. д.

Для иллюстрации сказанного построим таблицу истинности, подтверждающую тождественную справедливость цепного рассуждения (2.13), содержащего 3 элементарных высказывания *A, B* и *C*:

Таблица 4.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$(B \to C) \to (A \to C)$	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Как видим, последний столбец этой таблицы состоит из одних единиц. То есть цепное рассуждение (2.13) доказано.

Отметим, что есть и другой способ доказательства (вывода) сложных логических формул. Он состоит в выводе этих формул из более простых формул с помощью равносильных преобразований.

Например, тавтология $A \to (B \to A) \equiv 1$ доказана нами выше с помощью таблицы истинности (таблица 3). Но эту тавтологию можно доказать и с помощью равносильных логических преобразований:

$$A \to (B \to A) \equiv \left| \textit{используем } (2.12) \right| \equiv \overline{A} \vee (B \to A) \equiv \overline{A} \vee (\overline{B} \vee A) \equiv \left| \textit{используем } (2.2) \right| \equiv$$

$$\equiv \overline{A} \vee B \vee A \equiv \left| \textit{используем } (2.1) \right| \equiv \overline{A} \vee A \vee B \equiv (\overline{A} \vee A) \vee B \equiv \left| \textit{используем } (2.5) \right| \equiv$$

$$\equiv 1 \vee B \equiv \left| \textit{используем } (2.11) \right| \equiv 1. \qquad (2.14)$$

Обратим внимание на формулы (2.12). Они свидетельствуют о том, что импликацию, эквиваленцию и сложение по модулю 2 можно выразить через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Таким образом, в любой логической формуле можно перейти к использованию лишь трех логических связок: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. А это позволяет упрощать различные сложные логические формулы, содержащие и другие связки.

В процессе упрощения сложных логических формул их стараются привести или к дизъюнкции конъюнкций (**к форме ДНФ - дизъюнктивной нормальной форме**), или к конъюнкции дизъюнкций (**к форме КНФ – конъюнктивной нормальной форме**). Логические формулы, содержащие лишь дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, называются ***булевыми***. Например, формулы

$$(A\cdot B)\vee\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right) \text{ и } \left(A\vee\overline{B}\right)\cdot\left(\overline{A}\vee C\right)\cdot\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\right) \qquad (2.15)$$

– булевы. При этом первая из этих формул – ДНФ, а вторая – КНФ.

В булевых формулах принят следующий ***приоритет выполнения операций:***

- Сначала выполняется отрицание.
- Затем – операция логического умножения (конъюнкция).
- В последнюю очередь – операция логического сложения (дизъюнкция).

Процедура приведения логической формулы к булевой форме (к ДНФ или КНФ):

1. Используя (2.12), избавиться от всех логических операций, кроме конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.
2. Все отрицания «спустить» до переменных с помощью (2.4) и (2.8).
3. Раскрыть скобки с помощью (2.2) и (2.3).
4. Удалить лишние конъюнкции и дизъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях и дизъюнкциях с помощью (2.5), (2.6) и (2.7).
5. Удалить константы с помощью (2.11).

Пример 1. Привести формулу $(A\to B\cdot C)\cdot\overline{(B\vee C)}$ к булевой форме.

Решение.

$(A\to B\cdot C)\cdot\overline{(B\vee C)}\equiv(\overline{A}\vee B\cdot C)\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C})\equiv\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\vee B\cdot C\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\equiv\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\vee 0\equiv\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}.$

Пример 2. Привести формулу $(A\vee\overline{B})\to C$ к: *а*) ДНФ: *б*) КНФ.

Решение.

а) $(A \vee \overline{B}) \to C \equiv \overline{A \vee \overline{B}} \vee C \equiv \overline{A} \cdot \overline{\overline{B}} \vee C \equiv \overline{A} \cdot B \vee C$ - ДНФ.

б) Исходя из этой ДНФ и используя вторую из формул (2.3), получим:

$(A \vee \overline{B}) \to C \equiv \overline{A} \cdot B \vee C \equiv (\overline{A} \vee C) \cdot (B \vee C)$ - КНФ.

Совершенные ДНФ и КНФ (СДНФ и СКНФ)

Определение 1. ДНФ называется ***совершенной*** (СДНФ), если каждая ее конъюнкция включает в себя все переменные (с отрицаниями или без), причем каждую из них по одному разу. Процедура приведения ДНФ к СДНФ состоит в добавлении к конъюнкциям, которые содержат не все переменные, множителя 1, выраженного через недостающие переменные. Например, если в конъюнкции $A \cdot B$ не хватает переменной C, то её добавляют следующим образом:

$$A \cdot B \equiv A \cdot B \cdot 1 \equiv A \cdot B \cdot (C \vee \overline{C}) \equiv A \cdot B \cdot C \vee A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Пример 3. Привести ДНФ $\overline{A} \cdot B \vee C$ формулы $(A \vee \overline{B}) \to C$ (см. пример 2) к СДНФ.

Решение.

$$\overline{A} \cdot B \vee C \equiv \overline{A} \cdot B \cdot (C \vee \overline{C}) \vee C \cdot (A \vee \overline{A}) \cdot (B \vee \overline{B}) \equiv \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee (C \cdot A \vee C \cdot \overline{A}) \cdot (B \vee \overline{B}) \equiv$$

$$\equiv \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee (C \cdot A \vee C \cdot \overline{A}) \cdot B \vee (C \cdot A \vee C \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} \equiv$$

$$\equiv \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee C \cdot A \cdot B \vee C \cdot \overline{A} \cdot B \vee C \cdot A \cdot \overline{B} \vee C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \equiv$$

$$\equiv \left| \text{удалим повторное} \quad \overline{A} \cdot B \cdot C \right| \equiv$$

$$\equiv \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee A \cdot B \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$ - СДНФ.

Определение 2. КНФ называется ***совершенной*** (СКНФ), если каждая её дизъюнкция включает в себя все переменные (с отрицаниями или без), причем каждую из них по одному разу. Процедура приведения КНФ к СКНФ состоит в добавлении к дизъюнкциям, которые содержат не все переменные, слагаемого 0, выраженного через недостающие переменные. Например, если в дизъюнкции $A \vee B$ не хватает переменной C, то её добавляют следующим образом:

$$A \vee B \equiv A \vee B \vee 0 \equiv A \vee B \vee (C \cdot \overline{C}) \equiv (A \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee \overline{C})$$

Пример 4. Привести КНФ $(\overline{A} \vee C) \cdot (B \vee C)$ формулы $(A \vee \overline{B}) \to C$ (см. пример 2) к СКНФ.

Решение.

$(\overline{A}\vee C)\cdot(B\vee C)\equiv(\overline{A}\vee C\vee B\cdot\overline{B})\cdot(B\vee C\vee A\cdot\overline{A})\equiv(\overline{A}\vee C\vee B)\cdot(\overline{A}\vee C\vee\overline{B})\cdot$

$\cdot(B\vee C\vee A)\cdot(B\vee C\vee\overline{A})\equiv\left|\text{удалим повторное}\quad\overline{A}\vee B\vee C\right|\equiv$

$\equiv(\overline{A}\vee B\vee C)\cdot(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)\cdot(A\vee B\vee C)$ – СКНФ.

А теперь отметим следующее важное обстоятельство. Найденные в примерах 3 и 4 СДНФ и СКНФ формулы $F(A;B\,C)\equiv(A\vee\overline{B})\to C$ (как и любой другой формулы!) можно получить и иначе – из таблицы истинности этой формулы. Составим эту таблицу:

Таблица 5.

A	B	C	$\overline{B}$	$A\vee\overline{B}$	$F\equiv F(A;B;C)\equiv$ $\equiv(A\vee\overline{B})\to C$	$F_1(A;B;C)$	$F_0(A;B;C)$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0

А теперь сделаем следующее:

1. Составим дизъюнкцию конъюнкций тех наборов переменных $\{A,B,C\}$ или их отрицаний, которые в столбце F рассматриваемой формулы дают единицу (в этой дизъюнкции будет 5 конъюнкций). Обозначим эту дизъюнкцию символом $F_1(A;B;C)$. Чтобы все конъюнкции этой дизъюнкции давали единицу, все множители каждой из них должны быть равны единице. А значит, указанная дизъюнкция $F_1(A;B;C)$ будет иметь вид:

$$F_1(A;B;C)\equiv A\cdot B\cdot C\vee A\cdot\overline{B}\cdot C\vee\overline{A}\cdot B\cdot C\vee\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\vee\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$$

Формула $F_1(A;B;C)$ имеет значение 1 на тех же наборах значений переменных $\{A,B,C\}$, что и формула $F(A;B\,C)$, ибо на каждом из этих наборов одна из конъюнкций $F_1(A;B;C)$ равна 1, а потому и вся дизъюнкция $F_1(A;B;C)$ равна 1. На остальных трех наборах значений переменных $\{A,B,C\}$ все конъюнкции дизъюнкции $F_1(A;B;C)$ равны нулю, а потому и вся дизъюнкция $F_1(A;B;C)$ равна нулю. Таким образом, столбцы значений формул $F(A;BC)$ и $F_1(A;B;C)$ полностью совпадают. Следовательно

$$F(A;B;C) \equiv F_1(A;B;C) \equiv A \cdot B \cdot C \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$

А это ни что иное, как СДНФ формулы $F(A;BC) \equiv (A \vee \overline{B}) \to C$, полученная выше в примере 3.

2. А теперь составим конъюнкцию дизъюнкций тех наборов переменных $\{A,B,C\}$ или их отрицаний, которые в столбце F рассматриваемой формулы дают нули (в этой конъюнкции будет 3 дизъюнкции). Обозначим эту конъюнкцию символом $F_0(A;B;C)$. Чтобы все дизъюнкции этой конъюнкции давали нуль, все логические слагаемые каждой из них должны быть равны нулю. А значит, указанная конъюнкция $F_0(A;B;C)$ будет иметь вид:

$$F_0(A;B;C) \equiv (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \cdot (\overline{A} \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee C)$$

Формула $F_0(A;B;C)$ имеет значение 0 на тех же наборах значений переменных $\{A,B,C\}$, что и формула $F(A;BC)$, ибо на каждом из этих наборов одна из дизъюнкций конъюнкции $F_0(A;B;C)$ равна 0. А потому и вся конъюнкция $F_0(A;B;C)$ равна 0. На остальных трех наборах значений переменных $\{A,B,C\}$ все дизъюнкции конъюнкции $F_0(A;B;C)$ равны 1, а потому и вся конъюнкция $F_0(A;B;C)$ равна 1. Таким образом, столбцы значений формул $F(A;BC)$ и $F_0(A;B;C)$ полностью совпадают. Следовательно

$$F(A;B;C) \equiv F_0(A;B;C) \equiv (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \cdot (\overline{A} \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee C)$$

А это ни что иное, как СКНФ формулы $F(A;BC) \equiv (A \vee \overline{B}) \to C$, полученная выше в примере 4.

Пример 5. Получить СДНФ и СКНФ формулы $A \sim B$.

Решение. Обратимся к таблице 1 (стр.39), в которой приведен столбец значений формулы $A \sim B$. На основании выше сказанного сразу получаем:

$A \sim B \equiv A \cdot B \vee \overline{A} \cdot \overline{B}$ - СДНФ; $A \sim B \equiv (\overline{A} \vee B) \cdot (A \vee \overline{B})$ - СКНФ

Таким путем (через таблицу истинности) можно получить СДНФ и СКНФ и любой другой логической формулы. И этот путь обычно быстрее приводит к цели, чем аналитическое преобразование логических формул.

А теперь продемонстрируем пример практического применения формул математической логики.

Пример 6. Однажды следователю пришлось допрашивать трех свидетелей: Андрея, Виктора и Сергея. Их показания противоречили друг другу, и каждый обвинял кого – нибудь во лжи. Андрей утверждал, что Виктор лжет. Виктор обвинял во лжи Сергея. А Сергей уговаривал следователя не верить ни Андрею, ни Виктору. Следователь с помощью математической логики выяснил, кто из свидетелей говорит правду, а кто лжет, не задав им ни одного вопроса. Как он это сделал?

Решение: Введем следующие высказывания: $A \equiv$ {Андрей говорит правду}; $B \equiv$ {Виктор говорит правду}; $C \equiv$ {Сергей говорит правду}. Нам не известно, какие из этих высказываний истинны, а какие ложны. Нам известно следующее:

1. Если $A \equiv 1$, то $B \equiv 0$. А если $A \equiv 0$, то $B \equiv 1$. Это равносильно тому, что $\left(A \cdot \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \cdot B\right) \equiv 1$.

2. Если $B \equiv 1$, то $C \equiv 0$. А если $B \equiv 0$, то $C \equiv 1$. Это равносильно тому, что $\left(B \cdot \overline{C}\right) \vee \left(\overline{B} \cdot C\right) \equiv 1$.

3. Если $C \equiv 1$, то $A \equiv 0$ и $B \equiv 0$. А если $C \equiv 0$, то $A \equiv 1$ или $B \equiv 1$. Это равносильно тому, что $\left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \vee \left(\overline{C} \cdot (A \vee B)\right) \equiv 1$.

То есть получаем следующую систему логических уравнений:

$$\begin{cases} \left(A \cdot \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \cdot B\right) \equiv 1 \\ \left(B \cdot \overline{C}\right) \vee \left(\overline{B} \cdot C\right) \equiv 1 \\ \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \vee \left(\overline{C} \cdot (A \vee B)\right) \equiv 1 \end{cases}$$

. Все три логических равенства, образующие эту систему, должны быть истинны. А, значит, должна быть истинна их конъюнкция (логическое произведение):

$$1 \equiv \left(A \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot B\right) \cdot \left(B \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{C} \cdot (A \vee B)\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\left(A \cdot \overline{B}\right) \cdot \left(B \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C\right)\right) \vee \left(\left(\overline{A} \cdot B\right) \cdot \left(B \cdot \overline{C} \vee \overline{B} \cdot C\right)\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\left(A \cdot \overline{B} \cdot B \cdot \overline{C} \vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{B} \cdot C\right) \vee \left(\overline{A} \cdot B \cdot B \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{B} \cdot C\right)\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\left(0 \vee A \cdot \overline{B} \cdot C\right) \vee \left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee 0\right)\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right) \equiv$$

$$\equiv \left(A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \left(\overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\left(A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) \cdot \left(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right)\right) \vee \left(\left(A \cdot \overline{B} \cdot C \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \left(A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \vee$$

$$\vee \left(\left(\left(A \cdot \overline{B} \cdot C\right) \cdot \left(\overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right)\right) \vee \left(\left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{C} \cdot A \vee \overline{C} \cdot B\right)\right)\right) \equiv$$

$$\equiv 0 \vee \left(\left(A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{C} \cdot A\right) \vee \left(A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{C} \cdot B\right)\right) \vee \left(\left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{C} \cdot A\right) \vee \left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{C} \cdot B\right)\right) \equiv$$

$$\equiv 0 \vee 0 \vee 0 \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \equiv \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}.$$

Итак, $1 \equiv \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$. А это будет иметь место, если только $\{\overline{A} \equiv 1;\ B \equiv 1;\ \overline{C} \equiv 1\}$. То есть, если $\{A \equiv 0;\ B \equiv 1;\ C \equiv 0\}$.

Ответ: Виктор говорит правду, а Андрей и Сергей лгут.

Упражнения

1. Какие из приводимых ниже высказываний истинны, а какие ложны?

$A_1 : \left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}\right\}$; $A_2 :$ {100 больше 50 на 50% }; $A_3 :$ {Из всякого действительного числа можно извлечь кубический корень}; $A_4 :$ {Диагональ квадрата в полтора раза больше его стороны}; $A_5 :$ {Полуокружность в два раза больше ее диаметра}; $A_6 :$ {Уравнение $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ имеет один корень}; $A_7 :$ {Уравнение $\sqrt{x + 12} - x = 0$ имеет два корня}; $A_8 : \left\{(0{,}2)^{-2} - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 5\right\}$; $A_9 :$ {Неравенство $x^2 \succ x$ выполняется для всех $x \prec -1$}; $A_{10} : \{Sin\, 1000^{\circ} \succ 0\}$; $A_{11} :$ {Пушкин прожил больше, чем Лермонтов}; $A_{12} : \{3^{20} \succ 2^{20}\}$; $A_{13} :$ {Венера расположена дальше от Солнца, чем Марс};

A_{14} :{Функция $y = |x|$ дифференцируема не при всех x}; $A_{15}: \left\{ \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \right\}$;

A_{16} :{Первым президентом России был Ленин}.

2. Даны следующие высказывания:

P: {8 не является простым числом}; *Q*: {8 делится нацело на 4}; *R*: {8 делится нацело на 2}; *S*:{8 делится нацело на 5}. Найдите логические значения следующих высказываний : а) $P \to \overline{(Q \vee R)}$; б) $S \sim \overline{P}$; в) $R \cdot (S \to Q)$; г) $(\overline{S} \cdot R) \to (\overline{P} \vee Q)$.

Ответ: а) 0 ; б) 1 ; в) 1 ; г) 1.

3. Покажите, что логические операции $\overline{Q} \to \overline{P}$; $(P \cdot \overline{Q}) \to \overline{P}$; $(P \cdot \overline{Q}) \to Q$; $(P \cdot \overline{Q}) \to 0$ имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $P \to Q$.

4. Известно, что $A = 0$. Что можно сказать о логическом значении высказывания $(A \cdot B) \sim (A \vee C)$?

Ответ: 1 при C=0, и 0 при C=1.

5. Какие из следующих высказываний являются тавтологиями?

а) $(\overline{A} \cdot B) \to (\overline{A} \vee B)$; б) $\overline{A \vee B} \sim (\overline{A} \cdot \overline{B})$; в) $((P \cdot \overline{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$; г) $P \cdot Q \cdot (\overline{P} \vee \overline{Q})$;

д) $(Q \to (P \cdot R)) \cdot \overline{(P \vee R)}$; е) $P \to (Q \to P)$; ж) $(P \cdot (Q \vee P)) \sim P$.

Ответ: а); б); в); е); ж).

6. Докажите, что если $A \vee B = 1$, $\overline{A} \vee C = 1$, то $B \vee C = 1$.

7. Докажите, что если $A \vee B = 1$, $A \to C = 1$, $B \to D = 1$, то $C \vee D = 1$.

8. Что можно сказать о логическом значении высказывания:

а) $(\overline{P} \cdot Q) \sim (P \vee Q)$, если $P \to Q = 0$.

б) $P \to T$, если $P \to Q = 1$, $\overline{S} \to \overline{Q} = 1$, $T \to \overline{S} = 1$.

в) $P \to (\overline{R} \to \overline{Q})$, если $P \to (Q \to R) = 1$.

г) $P \to \overline{S}$, если $P \to Q = 1$, $\overline{S} \to \overline{Q} = 0$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 1; г) 1.

9. С помощью равносильных преобразований упростите формулы: а) $\overline{(\overline{P} \vee Q)} \to ((P \vee Q) \to P)$; б) $(\overline{X} \to Y) \vee \overline{(X \to Y)}$; в) $((\overline{X} \to Y) \cdot (\overline{X} \to \overline{Y})) \to X$; г) $(X \vee Y) \to (\overline{X} \to Z)$.

Ответ: а) 1; б) $X \vee Y$; в) 1; г) $X \vee \overline{Y} \vee Z$.

10. Запишите высказывание «Если натуральное число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10» на языке логики высказываний. Для полученной формулы найти СКНФ.

Решение: Введем следующие высказывания: A:{натуральное число делится на 2}; B:{натуральное число делится на 5}; $C \equiv A \cdot B$:{натуральное число делится на 2 и на 5}; D:{натуральное число делится на 10}. Тогда данное высказывание примет вид :

$C \to D \equiv (A \cdot B) \to D \equiv \overline{(A \cdot B)} \vee D \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee D$ - СКНФ.

11.Найдите СДНФ и СКНФ для следующих логических формул:

а) $\overline{X \vee Z} \cdot (X \to Y)$;   *б*) $(X \sim Z) \to (X \cdot \overline{Y})$

Ответ:

а) $\overline{X \vee Z} \cdot (X \to Y) \equiv \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$ - СДНФ

$\overline{X \vee Z} \cdot (X \to Y) \equiv (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \cdot (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \cdot (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \cdot (\overline{X} \vee Y \vee Z) \cdot (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \cdot (X \vee Y \vee \overline{Z})$
- СКНФ

б) $(X \sim Z) \to (X \cdot \overline{Y}) \equiv X \cdot Y \cdot \overline{Z} \vee X \cdot \overline{Y} \cdot Z \vee X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \vee \overline{X} \cdot Y \cdot Z \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z$ - СДНФ

$(X \sim Z) \to (X \cdot \overline{Y}) \equiv (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \cdot (X \vee \overline{Y} \vee Z) \cdot (X \vee Y \vee Z)$ - СКНФ

§3. Неопределенные высказывания (предикаты)

Определение. Повествовательное утверждение, зависящее от объектов x некоторого множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и становящееся высказыванием при конкретных $x = a_k$, называется ***неопределенным высказыванием*** или ***предикатом.***

Предикат обозначается символом $P(x)$. Он выражает некоторое свойство объектов $x = a_k$ множества A. А само множество A называется ***областью определения предиката*** $P(x)$.

Примеры предикатов:

1) $P(x): \{x \in N,\ x \prec 3\}$. Здесь A=N ; P(1)=1, P(2)=1, P(3)=0, P(4)=0, …

2) $P(x): \{x \in N,\ x$ делится на $3\}$. Здесь A=N; P(1)=0, P(2)=0, P(3)=1, P(4)=0, …

3) $P(x): \{x \in A$ - множество животных; x – жвачное животное $\}$. Здесь P(собака)=0, P(кошка)=0, P(корова)=1, …

Для неопределенного высказывания (предиката) можно составить ***таблицу его истинности***. Например, для первого из приведенных выше предикатов таблица его истинности выглядит так:

Таблица истинности предиката $P(x)$

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	…
1	1	0	0	0	0	…

Аналогично предикатам $P(x)$ одной переменной x определяются предикаты нескольких переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Предикаты нескольких переменных определяются на множествах $\{A_1\,,\ A_2\,, \ldots.\ A_n\}$ - своем для каждой переменной.

Например:

$P(x, y) : \{x \in N,\ y \in N,\ x \leq 6,\ y \prec 3,\ x \text{ делится на } y\}$.

Здесь $P(1,1) = 1$; $P(1,2) = 0$; $P(2,1) = 1$; $P(5,2) = 0$; $P(6,2) = 1$; … . Областью определения этого предиката двух переменных $\{x,\ y\}$является соответствующая этим переменным пара множеств $\{x \in A_1 = N,\ \ y \in A_2 = N\}$.

С помощью символов $\forall$ и $\exists$, называемых соответственно ***кванторами всеобщности и существования***, можно строить высказывания $\forall x P(x)$ (читается: *для любого x имеет место* $P(x)$), и $\exists x P(x)$ (читается: *существует x, для которого верно* $P(x)$). С помощью кванторов $\forall$ и $\exists$ можно образовывать новые предикаты. Например, если $P(x,\ y,\ z)$ - предикат от трех переменных, то $\exists x \forall y P(x,\ y,\ z)$ - предикат от z; $\forall x \forall y \exists z P(x,\ y,\ z)$ - просто высказывание (предикат без переменных).

Выполняя преобразование выражений с кванторами, следует иметь в виду, что перестановка двух рядом стоящих одинаковых кванторов приводит к равносильному высказыванию:

$$\forall x \forall y P(x,\ y,\ \ldots) \equiv \forall y \forall x P(x,\ y,\ \ldots)$$
$$\exists x \exists y P(x,\ y,\ ) \equiv \exists y \exists x P(x,\ y,\ \ldots) \tag{3.1}$$

Изменение же порядка следования разных кванторов искажает смысл высказывания и может привести к изменению значения истинности предиката. Так, например, на множестве натуральных чисел высказывание $\forall x \forall z \exists y \{xy \succ z\}$ истинно, а высказывание $\forall x \exists y \forall z \{xy \succ z\}$ ложно.

Отрицания высказываний с кванторами

Рассмотрим вопрос об отрицании высказываний $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$. Имеет место эквивалентность :

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)} \tag{3.2}$$

Действительно, левая часть этого равенства читается так: неверно, что для любого x выполняется $P(x)$. А правая часть читается так: существует x, для которого не выполняется $P(x)$ (обозначение $\overline{P(x)}$). И оба эти высказывания, очевидно, равносильны (эквивалентны). Аналогично справедлива эквивалентность

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)} \tag{3.3}$$

Действительно, левая часть этого равенства читается так: неверно, что существует x , для которого выполняется $P(x)$. А правая часть звучит так: для любого x не выполняется $P(x)$. Смысл и того, и другого, очевидно, одинаков.

Таким образом, чтобы построить отрицание высказывания, содержащего кванторы, нужно кванторы общности $\forall$ заменить на кванторы существования $\exists$, и наоборот. А утверждение, стоящее под знаком кванторов, заменить на противоположное.

Пример.

$$\overline{\forall x \exists y \forall z P(x,\ y,\ z)} \equiv \exists x \overline{\exists y \forall z P(x,\ y,\ z)} \equiv \exists x \forall y \overline{\forall z P(x,\ y,\ z)} \equiv \exists x \forall y \exists z \overline{P(x, y,\ z)} \tag{3.4}$$

Упражнения

Найдите области истинности и области определения предикатов 1-9. Сделайте чертеж.

1. $P(x,y):\{x=y\}$; 2. $P(x,y):\{x=\sqrt{y}\}$; 3. $P(x,y):\{|x|=|y|\}$; 4. $P(x,y):\{|x|=-|y|\}$;

5. $P(x,y):\{(x\geq 0)\cdot(y\leq 0)\}$; 6. $P(x,y):\{(x\geq 0)\vee(y\leq 0)\}$; 7. $P(x,y):\{(x\geq 0)\leftrightarrow(y\leq 0)\}$;

8. $P(x,y):\{(x^2+y^2=4)\cdot(y\prec 0)\}$; 9. $P(x,y):\{(x^2+y^2=4)\vee(y\prec 0)\}$

10. Сформулируйте высказывание: $\forall(a\neq 0)\exists x\{ax=6\}$. Истинно оно или ложно?

Ответ: Истинно.

11. Сформулируйте высказывание: $\exists x\exists y\{P(x)\cdot\overline{P(y)}\}$. Выполнима ли эта формула (может ли она принимать истинное значение)?

Ответ: Может, если $P(x)$ - не тождественная истина или тождественная ложь (не тавтология или противоречие).

12.Являются или не являются тавтологией формулы:

$\exists xP(x)\to\forall xP(x)$? $\forall xP(x)\to\exists xP(x)$?

Ответ: Первая из них не является, вторая является.

§4. Виды теорем. Необходимые и достаточные условия

В математике различные теоремы формулируются обычно в виде $A\Rightarrow B$, где A – условие теоремы (то, что дано), а B – заключение теоремы (то, что утверждается). A и B являются высказываниями (возможно, и неопределенными, то есть предикатами). При доказательстве теоремы в предположении истинности условия ($A=1$) устанавливается истинность заключения ($B=1$).

Примечание. Следствие $A\Rightarrow B$ является частным случаем импликации (логического следствия) $A\to B$, когда в последнем $A=1$ (истина) и $B=1$ (истина). При этом $A\Rightarrow B=1$ (истина).

Пример. Рассмотрим теорему Пифагора. Пусть $A(\Delta)$ и $B(\Delta)$ - неопределенные высказывания, заданные на множестве треугольников. А именно:

$A(\Delta):\{\text{в треугольнике ABC угол C прямой}\}$

$B(\Delta):\{\text{в треугольнике ABC } \mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2\}$

Тогда теорема Пифагора может быть записана так: $\forall\Delta\, A(\Delta)\Rightarrow B(\Delta)$.

Если имеет место теорема $A \Rightarrow B$, то есть если из истинности высказывания A следует истинность высказывания B, то истинность высказывания A называется ***достаточным условием*** для истинности высказывания B (ибо выполнение A гарантирует выполнение B). А истинность высказывания B называется ***необходимым условием*** для истинности высказывания A, ибо если не будет выполняться высказывание B, то не будет выполняться и A. То есть из справедливости теоремы $A \Rightarrow B$ вытекает справедливость теоремы $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. И наоборот. А это значит, что теоремы $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ равносильны, то есть в разных формах утверждают одно и то же. Но тогда вместо теоремы $A \Rightarrow B$ можно доказывать теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Доказав вторую из них, тем самым мы докажем и первую. Этот метод называется ***доказательством от противного***.

Теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ называются ***прямой*** и ***обратной*** соответственно. Каждая из них может оказаться как верной, так и неверной.

Например, пусть A:{четырехугольник является параллелограммом}, B:{в четырехугольнике есть пара равных сторон}. Тогда прямая теорема $A \Rightarrow B$ истинна, а обратная теорема $B \Rightarrow A$ ложна.

Если справедливы обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ (прямая и обратная), то пишут $A \Leftrightarrow B$. А говорят в этом случае, что A и B ***необходимы и достаточны друг для друга***. Или говорят другими словами: любое из высказываний, A или B, справедливо ***тогда и только тогда***, когда справедливо другое высказывание. Или, наконец, говорят, что утверждение A равносильно (эквивалентно) утверждению B.

Например, пусть A:{четырехугольник является параллелограммом}; B:{в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны}. Здесь $A \Leftrightarrow B$. То есть в четырехугольнике противоположные его стороны равны тогда ($\Rightarrow$) и только тогда ($\Leftarrow$), когда этот четырехугольник является параллелограммом. Утверждения A и B равносильны (эквивалентны).

Упражнения

Какие из теорем

$a)\ A \Rightarrow B;\quad b)\ B \Rightarrow A;\quad c)\ A \Leftrightarrow B;\quad d)\ \overline{A} \Rightarrow \overline{B};\quad e)\ \overline{B} \Rightarrow \overline{A};\quad f)\ \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$

верны, а какие нет, при следующих высказываниях:

1. $A: \{n -$ натуральное четное число$\}$; $\quad B: \{n -$ натуральное число, делящееся на $4\}$
2. $A: \{a = b\}; \quad B: \{a^2 = b^2\}$
3. $A: \{a = b\}; \quad B: \{a^3 = b^3\}$
4. $A: \{c = \sqrt{ab}\}; \quad B: \{c = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\}$
5. $A: \{a^c = b\}; \quad B: \{c = \log_a b\}$
6. $A: \{y = \sin x\}; \quad B: \{x = \arcsin y\}$
7. $A: \{$Четырехугольник ABCD - квадрат$\}$; $\quad B: \{AD = BC\}$
8. $A: \{$Бесконечная последовательность чисел ограничена$\}$;
   $B: \{$Бесконечная последовательность чисел имеет конечный предел$\}$
9. $A: \{F'(x) = f(x)\}; \quad B: \{F(x) + 5 -$ первообразная для $f(x)\}$
10. $A: \left\{ \text{Интеграл } \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{является несобственным} \right\};$
    $B: \left\{ \text{Интеграл } \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{не существует} \right\}$

Дайте словесную формулировку верных теорем. Обратите внимание на равносильность (эквивалентность) указанных ниже теорем:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}); \qquad (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$
$(A \Rightarrow \overline{B}) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \overline{A}); \qquad (B \Rightarrow \overline{A}) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \overline{B})$

Глава 3

Графы

В математике, да и не только в ней, широко используются различные графические представления. В силу своей наглядности они хорошо помогают уяснить суть той или другой задачи или проблемы. Именно поэтому геометрические задачи сопровождаются чертежами рассматриваемых фигур; исследуемые функции сопровождаются своими графиками; соотношения между рассматриваемыми величинами – разного рода диаграммами, и т. д. А если мы хотим понятнее растолковать кому–нибудь предстоящую ему дорогу, то мы рисуем схему его движения или предлагаем рассмотреть карту, схему метро и т.д. и объясняем порядок движения по этой схеме. К графическим образам можно также отнести схемы электрических цепей в сложных устройствах, блок-схемы различного рода процессов, и т.д.

К такого рода графическим объектам относятся и графы. На языке теории графов формулируются и решаются задачи проектирования сложных хозяйственных объектов (например, крупных заводов с разветвленными цепями служб, цехов и других подразделений) и управления ими; проектирования организационных структур, обеспечивающих работу и жизнедеятельность больших коллективов людей; задачи проектирования сложной техники и управления ею, и т.д.

§1. Общие понятия

<u>**Определение.**</u>

Графом $G = G(V, E)$ называется совокупность двух множеств: **вершин** $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и **ребер** $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, между элементами которых определено отношение ***инцидентности*** (соответствия): каждое ребро соединяет некоторые две вершины графа и инцидентно этим вершинам.

Если вершин и ребер у графа немного, его удобно изображать графически: вершины – точками, а ребра – отрезками или дугами, соединяющими вершины. Например, на рис.1 изображен граф G , имеющий 4 вершины и 5 ребер.

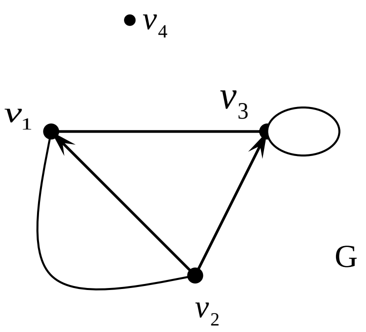


Рис. 3.1

Вершины и ребра графа называются его ***элементами***. Граф, содержащий конечное число элементов, называется ***конечным***, а бесконечное – ***бесконечным***. Число вершин конечного графа G называют его порядком и обозначают $|G|$. Граф порядка n, имеющий m ребер, называют (n,m) - графом. На рисунке 3.1 изображен $(4,5)$ - граф.

Ребро с совпадающими концами называется ***петлей***. У графа, изображенного на рис.3.1, имеется одна петля, начинающаяся и заканчивающаяся на вершине v_3. Граф без петель называется ***простым***. Далее, если не сказано другого, под словом «граф» подразумевать простой граф (без петель).

Ребро, соединяющее две вершины графа, может иметь направление. Тогда такое ребро называется ***направленным*** (ориентированным), или ***дугой***. При указании дуги в соответствующем порядке указываются вершины, соединяемые этой дугой. Например, на рис.1 $<v_2,v_1>$ и $<v_2,v_3>$ - направленные ребра (дуги). А $(v_1,v_2)\equiv(v_2,v_1)$ - обычное ребро (ненаправленное). Ненаправленным является и ребро (v_1,v_3).

Граф, содержащий только направленные ребра (дуги), называется ***ориентированным*** графом (**орграфом**). А граф, содержащий только неориентированные ребра, называется ***неориентированным*** (***н-графом***). Граф, у которого есть и ориентированные, и неориентированные ребра, называется ***смешанным***.

Отметим, что у смешанных графов принято каждое неориентированное ребро (v',v'') заменять на два противоположно ориентированных $<v',v''>$ и $<v'',v'>$. Это связано с тем, что ориентация ребра указывает, в какую сторону по нему можно двигаться. По неориентированному ребру, соединяющему две вершины, можно двигаться в обе стороны. И по двум противоположно ориентированным, соединяющим эти же вершины – тоже в обе стороны. После такой замены вместо смешанного графа G получаем ориентированный граф G_*, **канонически соответствующий** исходному графу G.

Например, на рис. 3.2б представлен граф G_*, канонически соответствующий графу G (рис. 3.2а). С точки зрения теории графов эти графы совпадают: $G_* = G$.

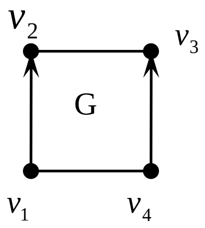


Рис.3.2а

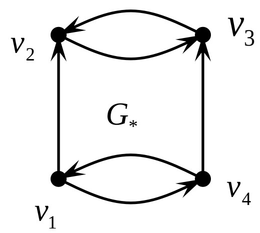


Рис. 3.2б

Некоторые вершины графа могут оказаться ***изолированными*** – к ним не подходит и от них не исходит ни одно ребро. Для графа G , изображенного на рис.3.1, вершина v_4 - изолированная.

Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются ***параллельными*** или ***кратными***. Граф, содержащий кратные ребра, называется ***мультиграфом***. Изображенный на рис.3.1 граф является мультиграфом, ибо у него есть два кратных (параллельных) ребра $<v_2,v_1>$ и (v_2,v_1). Первое из них направленное, а второе нет. В дальнейшем мультиграфы рассматривать не будем – только обычные, с одинарными ребрами.

Кстати, замена одного неориентированного ребра на пару противоположно ориентированных не делает граф мультиграфом, обо такая пара ребер равносильна одному неориентированному ребру. Поэтому оба графа – и граф G (рис. 3.2а), и граф G_* (рис. 3.2б) – обычные графы.

Граф называется ***нуль–графом***, если все его вершины изолированы. Множество ребер нуль–графа пусто.

Антиподом нуль–графа является ***полный граф***. Граф без петель и кратных ребер называется ***полным***, если каждая пара его вершин соединена одним неориентированным ребром (когда граф неориентирован), и парой противоположно направленных ориентированных ребер (когда граф ориентирован).

Вспоминая комбинаторику (глава 1, §5), можем подсчитать и общее количество ребер полных графов. Полный неориентированный граф с n вершинами имеет $C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}$ ребер. А полный ориентированный имеет их $A_n^2 = (n-1)n$, то есть в два раза больше.

Дополнением графа G до полного называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G , и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получить полный граф. На рисунках (3.3а) – (3.3в) последовательно изображены неориентированный граф G , его дополнение $\overline{G}$ до полного и полный неориентированный граф G_0.

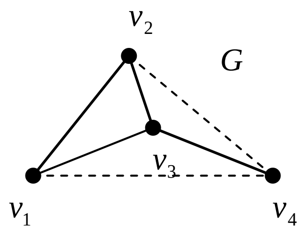


Рис. 3.3а

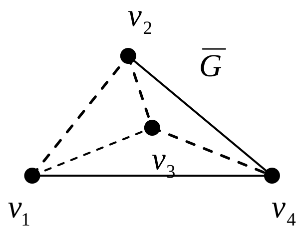


Рис. 3.3б

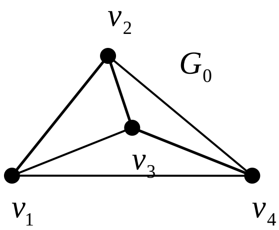


Рис. 3.3в

Теперь обратим внимание на следующее. Поскольку точки, изображающие вершины графа, берутся произвольно, то рисунки, изображающие один и тот же граф, могут быть совершенно непохожими. Как узнать, совпадают ли графы, заданные разными рисунками?

Для ответа на этот вопрос вводится понятие ***изоморфизма*** (одинаковости формы, идентичности) графов.

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются ***изоморфными***, если можно установить биекцию (взаимно – однозначное соответствие) между множествами вершин V_1 и V_2 и множествами ребер E_1 и E_2, сохраняющую отношение инцидентности. Это значит, что если $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, то вершина v_2 инцидентна ребру e_2 тогда и только тогда, когда вершина v_1 инцидентна ребру e_1.

Изоморфные графы считаются копиями друг друга, то есть равными графами.

Естественно, что изоморфными могут быть лишь графы с одинаковым количеством вершин и инцидентных им ребер. Хотя одного этого для изоморфности графов недостаточно – они могут при этом слишком сильно различаться своей структурой.

На рисунках (3.4а) и (3.4б) изображены изоморфные (равные) графы G_1 и G_2, ибо между элементами этих графов существует биекция (тождественная): $v_1 \leftrightarrow v_1, \ldots, v_5 \leftrightarrow v_5$.

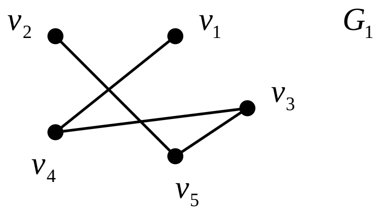


Рис. 3.4а

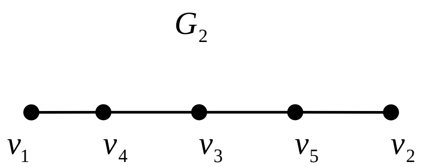


Рис. 3.4б

Да этот изоморфизм и очевиден: граф G_2 - это просто распрямленный (вытянутый в линию) граф G_1.

Изоморфными являются и графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 3.5а и 3.5б :

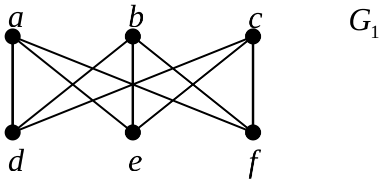


Рис. 3.5а

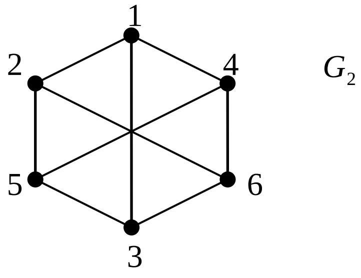


Рис. 3.5б

У каждого из них по 6 вершин и по 3 инцидентных с каждой из ребра. Установим следующую биекцию между вершинами этих графов:

$a \leftrightarrow 1$; $b \leftrightarrow 5$; $c \leftrightarrow 6$; $d \leftrightarrow 2$; $e \leftrightarrow 3$; $f \leftrightarrow 4$.

Тогда ребрам (a,d), (a,e), (a,f), (b,d), (b,e), (b,f), (c,d), (c,e), (c,f)

графа G_1 должны соответствовать (находиться в биекции) ребра

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)

графа G_2. Именно такими и являются ребра этого графа. Значит, можем считать графы G_1 и G_2 совпадающими ($G_1 = G_2$).

Указанная выше биекция между вершинами графов G_1 и G_2, сохраняющая отношение инцидентности их ребер - не единственно возможная. Например, факт изоморфизма этих графов подтверждает и такая биекция их вершин:

$a \leftrightarrow 2$ $b \leftrightarrow 3$ $c \leftrightarrow 4$ $d \leftrightarrow 5$ $e \leftrightarrow 6$ $f \leftrightarrow 1$

Найдите еще какую-нибудь.

Упражнения

1. Опишите множество вершин *V* и множество ребер *E* графа *G*, изображенного на рис. 3.1.

Ответ: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $E = \{(v_1, v_2), \langle v_2, v_1\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, (v_1, v_3)\}$.

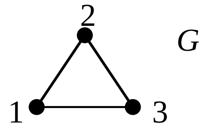
2. Равны ли графы, изображенные на рис. 3.2а и рис. 3.2б ?

Ответ: да.

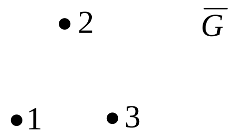
3. Определите дополнение $\overline{G}$ графа G до полного, если:

   а) G - треугольник ; б) G - четырехугольник.

Ответ: а)

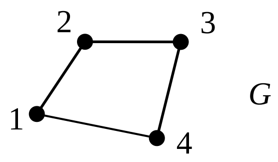


;

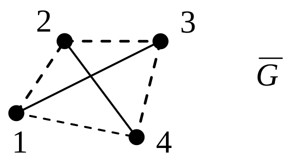


.

б)

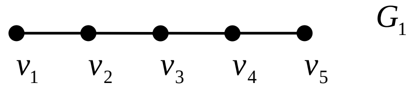


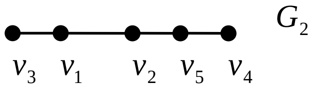
;



.

4. Равны ли графы G_1 и G_2:





?

<u>Ответ</u>: да, ибо они изоморфны – перенумерация вершин одного из этих графов делает его тождественно совпадающим с другим.

§2. Способы задания графов

Задать граф – это, в простейшем случае, нарисовать граф. А в более сложном случае (при громоздком рисунке) – описать множества его вершин, ребер и отношение инцидентности между ними.

Способ 1 описания графа.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ - множество вершин графа, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ - множество его ребер. Отношение инцидентности ребер вершинам, которые они соединяют, а, значит, и сам граф, можно задать ***матрицей инцидентности*** $\|e_{ij}\|$ размера $m \times n$: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно, а на пересечении i - ой вершины и j – го столбца, в случае неориентированного графа, проставляется 1, если они инцидентны, то есть если вершина является одним из концов ребра, и 0 – в противном случае.

Итак, для неориентированного графа

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если ребро } e_i \textit{ инцидентно вершине } v_j \\ 0 - \textit{в противном случае} \end{cases} . \qquad (2.1)$$

В случае же ориентированного графа (орграфа) на пересечении i- ой вершины и j – го столбца проставляется -1, если вершина является началом ребра, 1 – если вершина является концом ребра, и 0 – если вершина и ребро не инцидентны.

Итак, для ориентированного графа

$$e_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина } v_j - \text{начало ребра } e_i; \\ 1, \text{ если вершина } v_j - \text{конец ребра } e_i; \\ 0 - \text{если ребро } e_i \text{ не инцидентно вершине } v_j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Способ 2 описания графа.

Граф можно описать ***матрицей смежности*** $\|\delta_{kl}\|$ - квадратной матрицей размера $n \times n$, где k – номер строки, а l – номер столбца. По вертикали и горизонтали этой матрицы перечисляются все вершины $v_j \in V$, а на пересечении k–ой и l–ой вершин в случае н–графа проставляется число, которое равно числу ребер, соединяющих эти вершины; для орграфа δ_{kl} равно числу ребер с началом в k–ой вершине и концом в l–ой. Если граф не имеет петель (а мы условились рассматривать только такие (простые) графы), то все диагональные матрицы смежности равны нулю.

Заметим, что если в графе поменять нумерацию вершин или ребер, то его матрица инцидентности и матрица смежности изменяется. Но и в измененном виде они описывают один и тот же граф. Точнее, граф, изоморфный исходному.

Пример 1. описать с помощью матрицы инцидентности и матрицы смежности н–граф G, изображенный на рис. 3.3а.

Решение. Это описание приведено в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

G	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0
v_3	0	1	1	1
v_4	0	0	0	1

Таблица 2

G	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	0	0	1	0

Пример 2. описать с помощью матрицы инцидентности и матрицы смежности орграф G_*, изображенный на рис. 3.2б.

Решение: Это описание приведено соответственно в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

G_*	$\langle v_1, v_2 \rangle$	$\langle v_2, v_3 \rangle$	$\langle v_3, v_2 \rangle$	$\langle v_4, v_3 \rangle$	$\langle v_1, v_4 \rangle$	$\langle v_4, v_1 \rangle$
v_1	-1	0	0	0	-1	1
v_2	1	-1	1	0	0	0
v_3	0	1	-1	1	0	0
v_4	0	0	0	-1	1	-1

Таблица 4

G_*	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0	0	1
v_2	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1
v_4	1	0	0	0

Очевидны следующие свойства матриц инцидентности и матриц смежности графов.

Свойства матриц инцидентности.

1. Количество вершин и количество ребер любого графа (н–графа или орграфа) непосредственно указано в матрице инцидентности. Это - количество ее строк и столбцов соответственно.
2. В каждом столбце н–графа содержится ровно две единицы, указывающие вершины, которые соединяет неориентированное ребро, указанное в заголовке окна. А в каждом столбце орграфа содержится одна -1 и одна 1, указывающие вершины, которые соединяет ориентированное ребро графа, указанное в заголовке столбца.

Свойства матриц смежности.

1. Матрица смежности – квадратная, и ее размер совпадает с количеством вершин графа. Матрица смежности любого простого графа (без петель), как н–графа, так и орграфа, имеет на своей главной диагонали одни нули.
2. Для н–графа матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. Все ребра н–графа определяются верхним правым треугольником матрицы, расположенным над главной диагональю. Они помечены единицами. В нижнем левом треугольнике эти единицы дублируются.
3. Матрица смежности орграфа, вообще говоря, не симметрична, ибо ребро (v_k, v_l) у орграфа может быть, а ребро (v_l, v_k) - нет. Например, судя по таблице 4, у орграфа G_* ребро $\langle v_1, v_2 \rangle$ есть, а ребра $\langle v_2, v_1 \rangle$ нет. Ребра орграфа указаны единицами по всему полю матрицы смежности.

Пример 3. На рисунке 3.6 изображен сетевой граф G , изображающий последовательность выполнения операций (работ) некоторой программы. В нем стрелки обозначают операции, вершины – события, характеризующие окончание одних работ и начало других. Направленность стрелок отражает последовательность выполнения этапов работы. Исходный пункт программы – вершина 1, конечный – вершина 6. Как показывает сетевой граф, возможны различные варианты движения из исходного пункта в конечный.

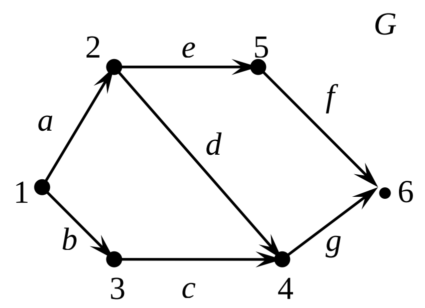


Рис. 3.6

Описать этот граф G:

а) матрицей инцидентности;

б) матрицей смежности.

Решение: Указанные матрицы данного орграфа приведены в таблицах 5 и 6 соответственно.

Таблица 5

G	a $\langle 1,2\rangle$	b $\langle 1,3\rangle$	c $\langle 3,4\rangle$	d $\langle 2,4\rangle$	e $\langle 2,5\rangle$	f $\langle 5,6\rangle$	g $\langle 4,6\rangle$
1	-1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	-1	-1	0	0
3	0	1	-1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	-1
5	0	0	0	1	1	-1	0
6	0	0	0	0	0	1	1

Таблица 6

G	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0

Кстати, последний столбец матрицы смежности 6, состоящий из одних нулей, указывает на то, что вершина 6 сетевого графа G – конечная. Из нее движение уже никуда не идет.

Теперь обратим внимание на следующий важный вопрос. Пронумеровав различными способами вершины и ребра одного и того же графа, можем получить для этого графа очень непохожие друг на друга и матрицы инцидентности, и матрицы смежности. Но, не смотря на свою непохожесть, для одного и того же графа эти матрицы будут различаться друг от друга лишь порядком следования в них строк и столбцов. Поэтому, если требуется выяснить, описывают ли две матрицы инцидентности, или две матрицы смежности, один и то же граф, или это различные графы, можно рассмотреть все возможные перестановки строк и столбцов матрицы одного из графов. Если при одной из таких перестановок получившаяся матрица совпадет с матрицей другого графа, то речь идет о двух изоморфных графах. То есть по существу об одном и том же графе. А если этого не обнаружится, то рассматриваемые графы – разные.

Оценим количество таких возможных перестановок. Если речь идет о матрице инцидентности, у которой n строк и m столбцов, то $n!$ - это число всех возможных перестановок строк, $m!$ - соответственно столбцов, и поэтому общее количество всех возможных перестановок в матрице инцидентности равно $n!\cdot m!$.

Это число очень быстро растет с ростом n и m. Например, для графа с n=10 вершинами и m=10 ребрами это число равно $10!\cdot 10!\approx 1{,}3\cdot 10^{13}$. Вручную такое огромное число перестановок осуществит совершенно нереально. И даже если привлечь ЭВМ, совершающую и анализирующую по 10 миллионов таких перестановок в секунду, то для осуществления всех этих перестановок потребуется $\approx 1{,}3\cdot 10^{6}$ сек ≈ 360 часов. А при n=m=12 число всех перестановок возрастет примерно в 10000 раз, а машинного времени на их переборку уже понадобятся века.

Впрочем, для матрицы смежности число всех возможных перестановок ее строк и столбцов много меньше. Действительно, перенумерация вершин приводит к одновременной согласованной перестановке и строк, и столбцов этой матрицы. Так что число всех возможных перестановок строк и столбцов матрицы смежности графа, имеющего n вершин, равно лишь $n!$. При n=10 получаем $10!\approx 3{,}6\cdot 10^{6}$. То есть машина сделает все эти перестановки за доли секунды. Но при n=20 опять этого времени понадобятся века.

Таким образом, для достаточно объемных графов вопрос о наличии или отсутствии их изоморфизма по матрицам их инцидентности или смежности решается очень непросто даже при помощи современных скоростных ЭВМ.

Однако, этот вопрос обычно так и не решают. Изоморфны или не изоморфны графы – на это могут прямо указывать их графические изображения. Особенно, если провести и некоторый анализ таких изображений.

Пример 4. Показать, что графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 3.7а и 3.7б, изоморфны.

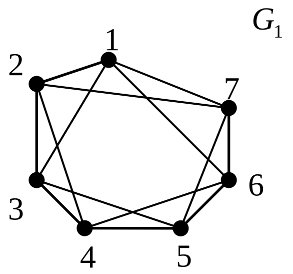


Рис. 3.7а

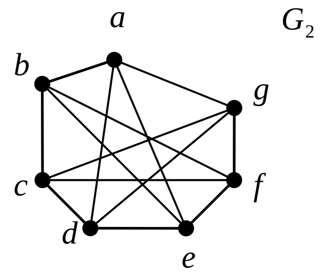


Рис. 3.7б

Решение: Оба графа имеют по 7 вершин и 14 неориентированных ребер, причем с каждой из вершин обоих графов инцидентны по 4 ребра. До полных (идентичных друг другу) графов каждому из них недостает по 7 ребер: {(1,4), (1,5), (2,5), (2,6), (3,6), (3,7), (4,7)} –графу G_1, и {(a,c), (a,f), (b,d), (b,g), (c,e), (d,f), (g,e)} – графу G_2. Имеет место очевидная биекция (одна из многих возможных) этих недостающих ребер:

$a \leftrightarrow 1$; $c \leftrightarrow 4$; $f \leftrightarrow 5$; $e \leftrightarrow 7$; $g \leftrightarrow 3$; $b \leftrightarrow 6$; $d \leftrightarrow 2$.

Но тогда имеет место и биекция ребер имеющихся. А это значит, рассматриваемые графы G_1 и G_2 действительно изоморфны.

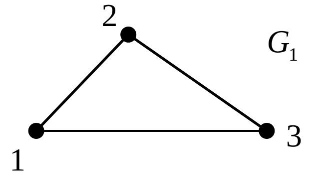
Отметим, что при решении этой задачи мы не стали составлять матрицы инцидентности или смежности графов и пытаться их сравнивать, ибо это слишком трудоемко.

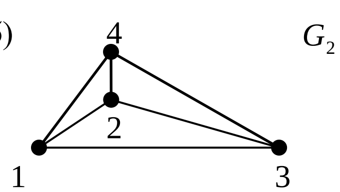
Упражнения

1. Построить матрицы инцидентности и смежности:

а) для треугольника;

б) для тетраэдра.

а) 

б) 

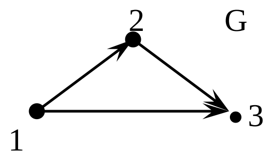
Ответ:

G_1	1-2	1-3	2-3
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1

G_1	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

G_2	1-2	1-3	1-4
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

2. Построить матрицы инцидентности и смежности для сетевого графа G:



Ответ:

G	1-2	1-3	2-3
1	-1	-1	0
2	1	0	-1
3	0	1	1

G	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0

3. Изоморфны ли графы G_1 и G_2?

G_1	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0

G_2	a	b	c
a	0	1	1
b	0	0	1
c	0	0	0

Ответ: да, изоморфны.

§3. Маршруты, пути, цепи, циклы

В этом параграфе рассматриваются различные перемещения по ребрам графов. В связи с этим нам понадобится довольно много новых понятий и определений.

1. Пусть $G = G(V, E)$ - неориентированный граф.

Маршрутом M в графе G называется такая последовательность $M = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ ребер этого графа, в которой любые два соседних ребра соединены – имеют общую вершину. ***Начало маршрута*** – вершина v_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная ребру e_2. ***Конец маршрута*** – вершина v_k, инцидентная ребру e_k и не инцидентная ребру e_{k-1}. В маршруте одно и то же ребро (как и вершина) может встречаться (проходиться) несколько раз. Число ребер в маршруте называется ***длиной маршрута***.

Маршрут, в котором все ребра разные, называется ***цепью***. Цепь, не пересекающая себя, то есть не содержащая повторно проходимых вершин, называется ***простой цепью***.

Маршрут, в котором $v_k = v_0$, то есть в котором совпадают его начало и конец (замкнутый маршрут), называется ***циклическим***.

Циклический маршрут называется ***циклом***, если он является цепью. То есть цикл – это замкнутая цепь. Цикл, представляющий собой простую цепь (в ней проходимые вершины не повторяются), называется ***простым циклом***.

Вершины $(v', v'') \in G$ называются ***связанными***, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Неориентированный граф G называется ***связным***, если все его вершины попарно связаны.

Цикл графа, содержащий все ребра графа, называется ***эйлеровым циклом***. А граф, содержащий эйлеров цикл, называется ***эйлеровым графом***. Проходя эйлеров цикл, эйлеров граф можно начертить целиком, не отрываясь от бумаги и не проходя повторно ни по одному из уже начертанных ребер. Длина эйлерова цикла равна количеству ребер графа. Эйлеров граф очевидным образом связен.

Теорема Эйлера.

Конечный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и когда все его вершины инцидентны четному числу ребер.

Теорему Эйлера можно сформулировать и по–другому: ***для того, чтобы неориентированный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связен и чтобы все его вершины были инцидентны четному числу ребер.***

Доказательство. Условие связности, очевидно, необходимо. Условие четности ребер, инцидентных вершинам, тоже необходимо, поскольку цикл, войдя в вершину по одному ребру, должен уйти из нее по – другому.

Докажем достаточность. То есть докажем, что если необходимые условия в графе G выполнены, то в этом графе можно построить эйлеров цикл.

Возьмем какую–либо вершину $a = v_0$ и начнем движение из нее с намерением построить какую–либо замкнутую цепь (цикл), заканчивающуюся в этой же вершине a. Может оказаться, что в процессе движения нами были пройдены все ребра графа, так что построенный цикл – эйлеров.

Если же в получившийся цикл вошли не все ребра графа (а это очень даже возможно), то рассмотрим граф G', состоящий из не вошедших в цикл ребер и инцидентных им вершин. В силу связности графа G и связности построенного цикла и граф G' будет связным. Вершины этого графа, как и вершины графа G, будут инцидентны четному числу ребер. И граф G' соприкасается с построенным циклом хотя бы одной из своих вершин b (b – общая вершина для цикла и графа G'). Такая вершина обязательно найдется, ибо в противном случае граф G не связен.

А теперь построим в графе G' какой–либо цикл, начинающийся и заканчивающийся в точке b , и соединим его с предыдущим циклом, начинающимся и заканчивающимся в точке a. Получим в итоге в графе G цикл, начинающийся и заканчивающийся в вершине a и включающий в себя оба указанных выше цикла (рис. 3.8а).

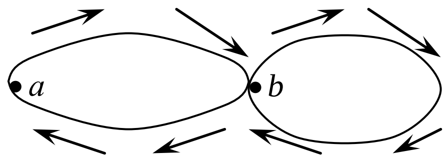


Рис. 3.8 а

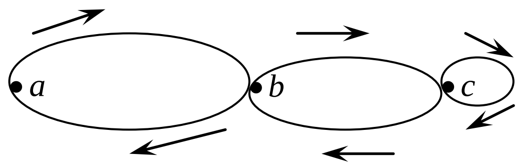


Рис. 3.8 б

Если и этот цикл не включает в себя все ребра графа G , то есть и он не эйлеров, то, по аналогии с предыдущим, расширим этот цикл, добавив к нему еще ряд ребер (рис. 3.8б). Через какое–то количество шагов у нас непременно получается цикл, в который войдут все ребра графа G. То есть будет построен эйлеров цикл для этого графа. Доказательство закончено.

Отметим, что приведенные рассуждения фактически определяют алгоритм построения эйлерова цикла на графе. Причем довольно простой алгоритм.

Простой цикл (без самопересечений), содержащий все вершины графа, называется ***гамильтоновым циклом***. А граф, содержащий гамильтонов цикл, называется ***гамильтоновым графом***.

Гамильтонов цикл не обязательно эйлеров, ибо в гамильтоновом цикле, по условию, проходятся все вершины графа (причем однократно каждая), но возможно, не все ребра. Точно так же не всякий эйлеров цикл – гамильтонов, ибо в эйлеровом цикле (в котором однократно проходятся все ребра графа), вершины графа могут проходиться повторно.

Проиллюстрируем все сказанное выше на примерах.

Пример 1. Рассмотрим связный неориентированный граф G (рис. 3.9).

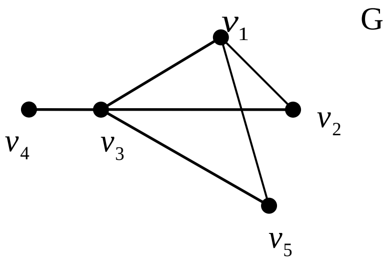


Рис. 3.9

Можно указать разные маршруты на этом маршруте. Например, маршрут $M_1 = (v_1 \to v_5 \to v_3 \to v_2)$-, который является цепью, ибо в этом маршруте нет ребер, проходимых повторно. А маршрут $M_2 = (v_2 \to v_3 \to v_1 \to v_5 \to v_3 \to v_4 \to v_3 \to v_2)$ - циклический. Но цепью он не является, ибо в нем есть повторно проходимые ребра. Маршрут

$M_3 = (v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_1)$ - цикл, причем простой. Эйлеров цикл для данного графа не существует, так как, несмотря на его связность, не все его вершины инцидентны четному числу ребер. Не существует, очевидно, для этого графа и гамильтонова цикла, ибо невозможно совершить цикл, содержащий все вершины графа, чтобы вершина v_3 была пройдена в нем только один раз.

Пример 2. рассмотрим рис. 3.10а, на котором изображен связный неориентированный граф G.

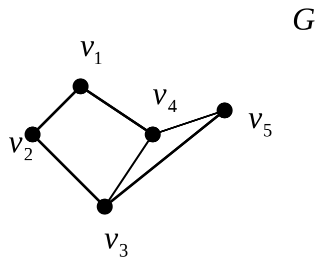


Рис. 3.10 а

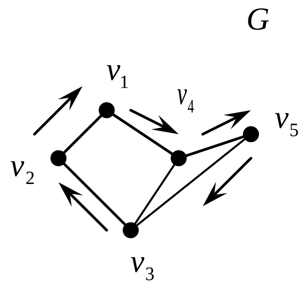


Рис. 3.10 б

Для этого графа существуют гамильтонов цикл (см. рис. 3.10б). Обратим внимание: в него не входит ребро (v_3, v_4). Но для гамильтоновости цикла это и неважно – главное, что в него входят все вершины графа, и что все эти вершины проходятся однократно. А вот эйлерова цикла для графа G не существует, ибо у него есть вершины с нечетным числом инцидентных им ребер (вершины v_3 и v_4).

Кстати, если у этого графа убрать ребро (v_3, v_4), то получится граф, у которого есть и эйлеров цикл, и гамильтонов. И эти циклы совпадают.

Пока мы говорим исключительно о неориентированных графах (о н-графах). Если же граф ориентирован (орграф), то у него все ребра имеют направление. И двигаться по графу разрешается лишь по этим направлениям (вдоль стрелок). В связи с этим для орграфов приведенные выше понятия, введенные для н–графов, претерпевают некоторые изменения.

2. Пусть $G = G(V, E)$ - ориентированный граф (орграф).

Аналогом маршрута в ориентированном графе является ***путь***. Путь – это тот же маршрут, но проходимый лишь в разрешенных направлениях (вдоль стрелок на графическом изображении графа). У пути есть ***начало*** и ***конец***, которые представляют собой начальную и конечную вершины пути.

Путь называется ***ориентированной цепью*** (или просто ***цепью***), если каждое ребро графа в этом пути проходится не более одного раза.

Простая цепь – это цепь, не пересекающая себя и не соприкасающаяся сама с собой В простой цепи каждая ее вершина проходится лишь однократно.

Контур – это путь, в котором совпадают его начало и конец. То есть контур – это ***циклический путь***.

Контур называется ***циклом***, если он является цепью. В цикле каждое проходимое в нем ребро проходится лишь один раз. Цикл, представляющий собой простую цепь, называется ***простым циклом***.

Вершина v'' называется ***достижимой*** из вершины v', если существует путь $\Pi = (v', \ldots, v'')$ с началом v' и концом v''.

Орграф именуется ***связным***, если он связен без учета ориентации дуг (как н - граф), и ***сильно связным***, если существует путь из любой его вершины v' в любую другую его вершину v''.

Определения ***эйлерова цикла*** и ***гамильтонова цикла*** для орграфа те же, что и для н–графа. Но с естественной поправкой: двигаться в этих циклах можно только по разрешенным направлениям.

Теорема Эйлера для орграфа

Конечный ориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и когда из каждой его вершины выходит столько направленных ребер (дуг), сколько в нее и входит.

Доказательство этой теоремы по существу ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы для н–графа. И алгоритм, приводящий к построению эйлерова цикла для эйлерова орграфа тот же, что и для эйлерова н – графа.

А вот аналогичного простого алгоритма, приводящего к построению гамильтонова цикла (если он, конечно, существует) и для н–графа, и для орграфа пока не найдено. В то же время многие прикладные задачи сводятся к проблеме построения именно гамильтонова цикла.

Классические примеры таких задач:

Задача о шахматном коне. Можно ли, начиная с произвольного поля на шахматной доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы пройти через все поля и вернуться в исходное, побывав на каждом поле по одному разу?

Задача о званом обеде. Обед накрыт на круглом столе. Среди приглашенных некоторые знакомы друг с другом. При каких условиях можно рассадить всех так, чтобы по обе стороны каждого из присутствующих сидели его знакомые?

Задача о коммивояжере. Коммивояжер должен объездить все n городов. Для того чтобы сократить свои расходы, он хочет построить такой маршрут, чтобы объездить все города точно по одному разу и вернуться в исходный город с минимумом затрат.

Гамильтонов цикл, если он существует, представляет собой просто последовательность n вершин графа, которая проходится одна за другой и которая заканчивается в той же вершине, в которой и начиналась. Поэтому существует такой алгоритм, который, казалось бы, можно применить к решению любой задачи о гамильтоновом цикле: генерируем все возможные перестановки вершин и проверяем, какая из них может быть реализована (пройдена по графу). Она и будет представлять собой гамильтонов цикл для этого графа. Если ни одна из последовательностей вершин не может быть пройдена, то гамильтонова цикла у графа нет.

Осложняет дело лишь большое количество таких перестановок ($n!$). Впрочем, есть модернизация этого алгоритма (так называемый «алгоритм с возвратами»), позволяющий существенно уменьшить количество перестановок вершин при поиске гамильтоновых циклов графов. О сути этой модернизации см. [2], стр. 112 – 114.

Пример 3. Рассмотрим рис. 3.11, на котором изображен орграф G.

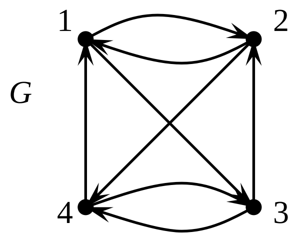


Рис. 3.11

Этот граф связен, причем сильно связен, ибо из каждой его вершины можно попасть в любую другую. Граф этот эйлеров, так как в каждую его вершину входят столько ребер, сколько из нее выходят.

Пример эйлерова цикла в графе: $(1 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 \to 2 \to 1)$.

Но этот цикл не является гамильтоновым, так как вершины графа в этом цикле проходятся повторно.

§4. Деревья и лес

В теории графов имеются еще два важных для этой теории понятия – ***дерево*** и ***лес***.

Связный неориентированный граф называется ***деревом***, если он не имеет циклов. Дерево – это минимальный связный граф в том смысле, что при удалении из него хотя бы одного ребра он теряет связность. Изображенные на рис. 3.12 графы являются деревьями.

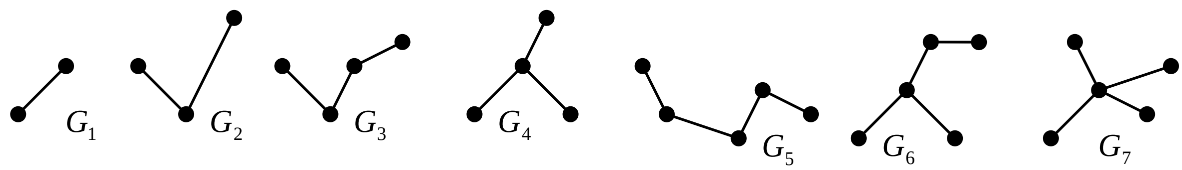


Рис. 3.12

При этом граф G_1 - простейшее дерево (дерево с двумя вершинами); G_2 - с тремя; G_3 и G_4 - деревья с четырьмя вершинами; G_5, G_6, G_7 - с пятью. Каждая новая (дополнительная) вершина дерева добавляет к нему одно ребро, которым она связывается с одной из старых вершин. Связывать эту новую вершину с двумя и более старыми нельзя, так как новая вершина с этими старыми вершинами образует цикл, а циклов в дереве быть не должно. Поскольку в дереве с двумя вершинами лишь одно ребро, в дереве с тремя вершинами – два ребра, в дереве с четырьмя вершинами – три, и т.д., то в дереве с n вершинами содержится ровно n-1 ребер.

В неориентированном дереве между любыми двумя его вершинами можно провести цепь, причем только одну (две цепи уже невозможны – они образуют цикл). Верно и обратное: если любые две вершины графа связаны единственной цепью, то граф является деревом.

Если имеется n изолированных вершин, то, по–разному соединяя их ребрами, можно строить на них различные деревья. Можно доказать (доказательство опускаем), что всего можно построить n^{n-2} таких деревьев. В частности, если $n=3$, то существует $3^{3-2}=3$ различных дерева (рис. 3.13):

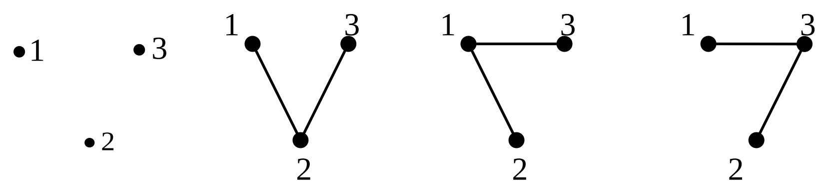


Рис. 3.13

Если же $n=4$, то всех возможных деревьев будет $4^{4-2}=16$. Некоторые из них изображены на рис. 3.14.

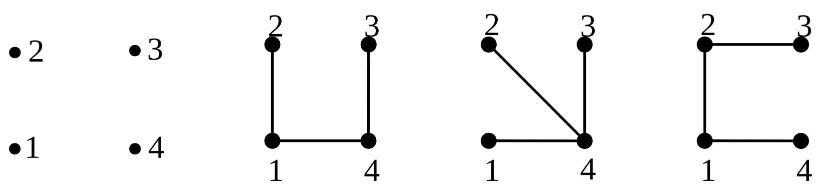


Рис. 3.14

Дерево – это неориентированный граф. Но его можно и ориентировать. Для этого одну из его вершин следует принять за основную – за ***корень дерева***. Тогда ребра, непосредственно выходящие из корня, станут скелетными (главными) ветвями дерева, а их вторые концы – точками крепления других, более мелких ветвей. И так далее. Определяя направление движения по ветвям от корня (аналогично тому, как идет сокодвижение в реальных деревьях), получим ***ориентированное дерево***. Выбрав в качестве корня другую вершину, получим другое ориентированное дерево. Из одного неориентированного дерева можно построить n ориентированных, выбирая в качестве корня разные его вершины.

Кстати, набор вложенных друг в друга папок в программе Windows – это дерево. Оно так и называется: дерево папок. Причем это дерево ориентированное, так как одна из этих папок корневая, а остальные папки находятся на ветвях этого дерева в соподчинении (в иерархии) друг к другу. И если, например, у нас есть 4 папки, то из них можно образовать, как уже отмечалось выше, 16 неориентированных деревьев. Каждое их них можно ориентировать (соподчинив папки друг другу) 4 способами. В итоге получаем $16 \cdot 4 = 64$ варианта устройства каталога из этих четырех папок. А в общем случае (при n папок) получим $n \cdot n^{n-2} = n^{n-1}$ ориентированных вариантов каталога.

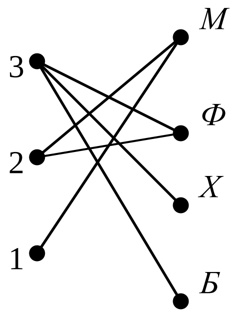
Кстати, если заранее оговорено, какая из n папок является корневой, тогда всех возможных каталогов из этих папок будет в n раз меньше. То есть их будет n^{n-2}.

Лес – это несвязный н–граф без циклов, связными компонентами которого являются деревья. Например, объединение в один граф всех деревьев, изображенных на рис. 3.12, или любой части этих деревьев, будет лесом. Любая часть леса, как и лес в целом, не имеет циклов.

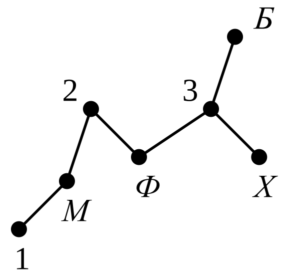
Упражнения

1. Речь идет о трех школьниках. Первый из них посещает дополнительные занятия по математике, второй – по математике и физике, третий – по физике, химии и биологии. Построить граф, характеризующий связь между школьниками и посещаемыми ими предметами. Является ли он деревом?

Ответ:



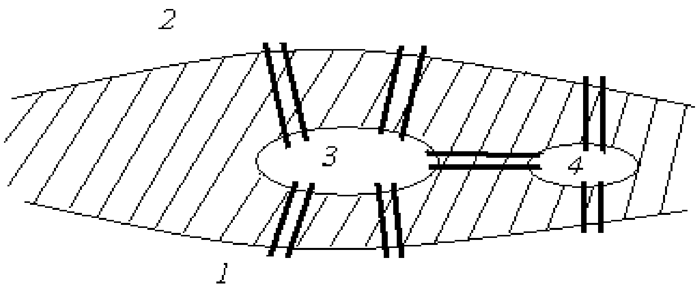
или



Построенный граф является деревом.

2. Задача о кёнигсбергских мотах (с ее рассмотрения Эйлером, считается, берет начало теория графов).

Через старинный город Кенигсберг, нынешний Калининград, протекает река Прегель. Триста лет тому назад берега этой реки и два острова были связаны семью мостами так, как показано на рис. 3.15а



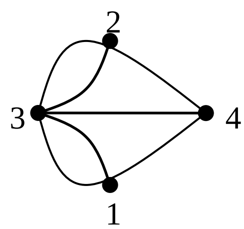


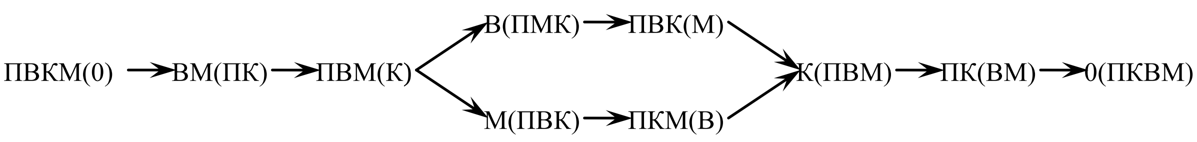
Рис.3.15 а Рис. 3.15 б

Вопрос: можно ли пешеходу так проложить свой путь, чтобы пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в исходный пункт?

Решение: Составим граф, соответствующий рассматриваемой задаче. Берега реки 1 и 2 и острова 3 и 4 будем считать вершинами графа, а мосты, их соединяющие – ребрами (неориентированными). В итоге получим н–граф, изображенный на рис.3.15б. И теперь рассматриваемая задача о кенигсбергских мостах состоит в следующем: существует ли Эйлеров цикл для этого графа? Вспоминая теорему Эйлера для н–графов, получаем ответ: не существует, так как у графа имеются вершины с нечетным количеством инцидентных с ними ребер.

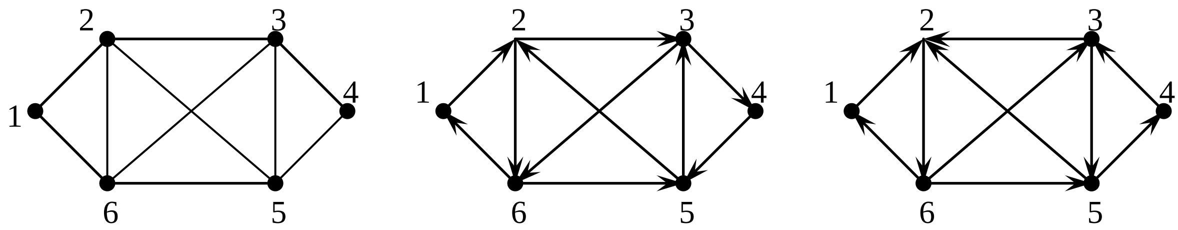
3. Перевозчику (П) нужно переправить через реку волка (В), козу (К) и мешок с капустой (М). Но лодка так мала, что перевозчик может взять с собой в лодку только один из этих объектов. Кроме того, нельзя капусту оставлять вместе с козой (коза съест капусту), и козу вместе с волком (волк съест козу). Как можно осуществить переправу? Найденный вариант перевозки представьте сетевым графом, изображающим последовательность выполнения операций.

<u>Ответ</u>: Указанный сетевой граф выглядит так:



Здесь в качестве узлов графа отмечены последовательные положения участников перевозки на исходном берегу реки и в скобках – на противоположном. Как видим, есть два варианта осуществления требуемой перевозки.

4. Являются ли эйлеровыми графы G_1, G_2, G_3? На эйлеровых графах укажите эйлеров цикл.



G_1 G_2 G_3

<u>Ответ</u>: Графы G_1 и G_2 - эйлеровы. Граф G_3 - нет. Эйлеров цикл в графе G_1 (один из возможных): $1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$. Эйлеров цикл в графе G_2 (один из возможных): $1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 6$.

5. Являются ли графы G_1, G_2, G_3, о которых шла речь в предыдущей задаче, гамильтоновыми? На гамильтоновых графах укажите гамильтонов цикл.

Ответ: Граф G_1 - гамильтонов. Его гамильтонов цикл очевиден: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$. Графы G_2 и G_3 не гамильтоновы.

6. Решите задачу о званом обеде (см. стр. 76), если в званом обеде участвуют 5 человек: хозяин и две семейные пары. Хозяин знаком с обоими мужчинами. Мужчины незнакомы друг с другом. Женщины друг с другом знакомы.

Ответ: Х – 1М – 1Ж – 2Ж – 2М - расположение участников обеда за круглым столом.

Литература

1. Мальцев, И.А. Дискретная математика./, И.А. Мальцев. - Издательство «Лань», 2011. - 290 с.
2. Асеев, Г.Г. и др. Дискретная математика./ Г.Г. Асеев и др. Издательство «Феникс», 2003. - 142 с.
3. Москинова, Г.И. Дискретная математика/ Г.И. Москинова.- Издательство «Логос», 2002.- 238 с.
4. Галушкина Ю. И. Конспект лекций по дискретной математике./ Ю. И. Галушкина, А.Н. Марьямов. - Издательство «Айрис пресс», 2008. - 173 с.
5. Палий, И.А. Дискретная математика: Курс лекций/ И.А. Палий. - Издательство Эксмо», 2008. - 350 с.

Учебное издание

Комогорцев Владимир Филиппович

Бардадын Надежда Николаевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Множества
Математическая логика
Графы

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 13.06.2012 г. Формат 60х84 1/16. Бумага писчая.
Усл. п.л. 5,11. Тираж 150 экз. Изд. №2195.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА